Piirkonnavoor 2024

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Andres Alumets
Aleksei Ganyukov
Maksim Ivanov
Jaan Kristjan Kaasik
Raul Kangro
Urve Kangro
Oleg Košik
Härmel Nestra
Markus Rene Pae
Martin Rahe
Sandra Schumann
Toomas Tennisberg
Birgit Veldi
Hendrik Vija
Raili Vilt

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 30 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$987 + 654 + 321 - 876 - 543 - 210 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Kirjutises $2024*$ asendatakse tärn ühe numbriga nii, et saadud viiekohaline arv ei jagu 2-ga, 3-ga ega 5-ga. Leia kõigi tärni asemele sobivate numbrite summa.

. . . .

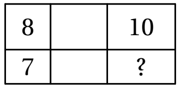
3. Neli vrappi ja kolm jooki maksavad kokku 7 eurot rohkem kui kaks vrappi ja üks jook kokku. Kui palju tuleb maksta, ostes neli vrappi ja neli jooki?

. . . .

4. Üks poiss ja mõned tüdrukud sõid tühjaks kreekeripaki, milles oli alguses 150 kreekerit. Sama ajaga, kui poiss sõi 3 kreekerit, sõi iga tüdruk 2 kreekerit. Kui palju oli tüdrukuid, kui poiss sõi kokku $\frac{1}{5}$ kõigist kreekeritest?

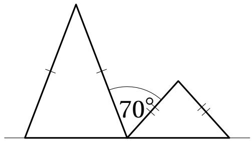
. . . .

5. Ristkülik on jaotatud 6 väikseks ristkülikuks. Neist 3 väikse ristküliku ümbermõõdud on joonisel kirjutatud nende ristkülikute sisse. Leia alumise parempoolse ristküliku ümbermõõt.



. . . .

6. Joonisel on kõrvuti kaks võrdhaarset kolmnurka, mille alused asuvad ühel sirgel ja omavad ühist otspunkti. Ühe kolmnurga alusnurk ja teise kolmnurga tipunurk on mõlemad suurusega α. Joonisel näidatud kolmnurkade haarade vahelise nurga suurus on 70°. Leia α.



. . . .

7. Arvteljel on märgitud punktid $A(20)$, $B(24)$ ja C. Punkt C asub punktist A kolm korda kaugemal kui punktist B. Leia punkti C kõik võimalikud koordinaadid.

. . . .

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaegа on 30 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$\frac{20 \cdot 24 + 24 \cdot 22}{21} = \ldots\ldots\ldots$$

2. Numbrite

$$9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0$$

vahele tuleb panna kolm plussmärki nii, et saadud avaldise väärtus oleks väiksem kui 1000. Leia see väärtus.

....

3. Kolm naturaalarvu suhtuvad nagu $2 : 3 : 4$ ja nende aritmeetiline keskmine on 78. Leia neist kolmest arvust vähim.

....

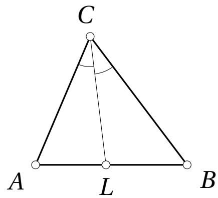
4. Kevin võttis endale $\frac{2}{3}$ karbis olnud mandariinidest. Liisa võttis karbist endale kõik ülejäänud mandariinid ning lisaks sai 8 mandariini Kevinilt. Pärast seda oli Kevinil ja Liisal mandariine võrdselt. Mitu mandariini oli algselt karbis?

....

5. Koordinaattasandile on joonestatud rööpkülik $ABCD$, mille kolm tippu on $A(1;3)$, $B(2;0)$ ja $C(4;1)$. Leia rööpküliku $ABCD$ pindala.

. . . .

6. Kolmnurgas ABC tõmmatakse nurgapoolitaja CL. On teada, et nurkade ACL ja CAL suuruste summa on 100° ning nurkade BCL ja BLC suuruste summa on 130°. Leia kolmnurga ABC suurima nurga suurus.



. . . .

7. Mitu erinevat võimalust on sõnas TOSIN tähtede ümberjärjestamiseks nii, et ükski täht ei oleks oma kohal ega naabertähe kohal?

. . . .

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 30 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$(789 : 3 + 789 : 6) : (789 : 12) = \dots\dots\dots\dots$$

2. Numbritest A, B ja C moodustatud kolmekohalise arvu korrutamisel ühekohalise arvuga D on tulemuseks 2024. Leia numbrite A, B, C ja D suurim võimalik summa.

. . . .

3. Olgu a, b ja c positiivsed arvud. Arv a on 3 korda väiksem summast $b + c$ ja 3 korda suurem vahest $b - c$. Mitu korda on arv b suurem arvust c?

. . . .

4. Kahes karbis on kokku 120 mustikat. On teada, et 20% ühe karbi mustikate arvust on 9 võrra suurem kui 30% teise karbi mustikate arvust. Mitu mustikat on karbis, milles on mustikaid vähem?

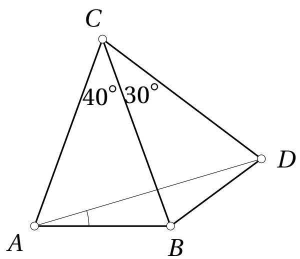
. . . .

5. Teravnurkse kolmnurga ABC kõrgusel CL on märgitud punkt K. On teada, et $|AB| = 12$ cm ja $|CK| = 6$ cm. Leia nelinurga $ACBK$ pindala.

. . . .

6. Kõrvuti paiknevate võrdhaarsete kolmnurkade ABC ja BCD tipunurkade ACB ja BCD suurused on vastavalt 40° ja 30°. Leia nurga BAD suurus.

. . . .



7. Arvud x ja y valitakse nii, et $|x| = |x + y| = 9$. Leia avaldise $|x - y|$ kõik võimalikud väärtused.

. . . .

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 3 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Liitmistehtes

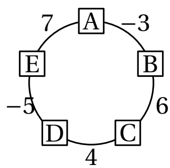
$$\begin{array}{cccc} & A & B & C & D \\ + & & A & B & C \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

vastavad erinevatele tähtedele erinevad numbrid ja samale tähele kõikjal sama number. Leia numbrite A, B, C ja D summa.

2. Ritta kirjutatakse 2024 järjestikust naturaalarvu. Neist suurim on vähimast 8 korda suurem. Mitu numbrit 7 on selles reas kokku?

3. Ristküliku $ABCD$ küljel AB pikkusega 5 cm valitakse punktid K ja L nii, et punkt K on punktile A lähem. Kolmnurkade CKL, CLB ja AKD pindalad on vastavalt 2 cm^2, 2,5 cm^2 ja 3 cm^2. Leia lõigu KL pikkus ja nurga CKL suurus.

4. Ringjoonel on 5 ruutu A, B, C, D ja E. Ühte neist ruutudest kirjutatakse arv 0 ja hakatakse seejärel mööda ringjoont päripäeva liikuma. Igasse järgnevasse ruutu jõudmisel kirjutatakse sinna eelmises ruudus oleva arvu ja ringjoone viimati läbitud kaarele märgitud arvu summa ning kustutatakse arv eelmisest ruudust. Nii toimides tekib mingi aja järel olukord, kus mingisse ruutu kirjutatakse arv 2024. Leia kõik võimalused, milline ruut see saab olla.



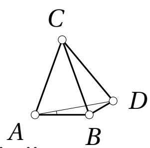
Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 3 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Emal oli poodi minnes kaasas ainult 1-euroseid ja 5-euroseid, kokku üle 50 euro, kuid alla 100 euro. Kui ta tagasi tuli, oli tal raha 3 korda vähem. Ta pani tähele, et tal oli järel samapalju 5-euroseid kui enne oli 1-euroseid ja samapalju 1-euroseid kui enne oli 5-euroseid ning rohkem raha polnud. Kui palju raha ema poes ära kulutas?

2. Kõrvuti paiknevate võrdhaarsete kolmnurkade ABC ja BCD tipunurkadest ACB ja BCD esimene on teisest 2 korda suurem. Nurga BAD suurus on 10°.



a) Leia kolmnurga ABC sisenurkade suurused.

b) Kas nelinurga $ABDC$ ümbermõõt on suurem, väiksem või niisama suur kui kolmekordse lõigu AC pikkus?

3. Jalgrattur sõitis punktist A punkti B ühtlase kiirusega 30 km/h. Punktist A aga alustas 20 minutit pärast jalgratturi väljumist sõitu auto, mis liikus sama teed pidi kogu aeg kiirusega 90 km/h. Kui auto jõudis jalgratturile järele, pööras auto ümber ja sõitis endise kiirusega tagasi punkti A. Pärast 40 minutit kestnud peatust punktis A suundus auto endise kiirusega punkti B ja jõudis sinna jalgratturiga samal ajal. Leia punktide A ja B vaheline kaugus.

4. Ruudustikus mõõtmetega 7×7 on ühte nurgaruutu alguses kirjutatud arv 8. Igal käigul valib Juku tühja ühikruudu, millega ühist külge omaval ruudul on arv, ja kirjutab sinna tehtava käigu järjekorranumbri jagamisel 6-ga tekkiva jäägi ja naaberruudul oleva arvu summa, kusjuures naaberruudul oleva arvu ta kustutab. Nii toimib Juku mõnda aega, kuni pärast järjekordset käiku ta lõpetab. Kui palju on erinevaid ühikruute, millesse Juku saab käike sobivalt valides kirjutada viimasel käigul arvu 2024?

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Martinil on 7 paari siniseid sokke, 7 paari punaseid sokke ja 7 paari rohelisi sokke. Martin tahab need kõik ära pesta oma 3 pesumasinaga. On teada, et iga pesumasin sööb pestes ära kõik rohelised sokid ja täpselt ühe soki igast punaste sokkide paarist; siniseid sokke ükski pesumasin ei söö. Leia, mitmel eri viisil on võimalik sokid pesumasinate vahel ära jagada nii, et kehtiksid kõik järgnevad tingimused:

1) iga paari mõlemad sokid lähevad samasse pesumasinasse;
2) igasse pesumasinasse läheb üks ja sama arv sokke;
3) iga pesumasin sööb ühe ja sama arvu sokke ära.

Kaks jaotamise viisi loeme erinevaks siis, kui mõnes pesumasinas on mingit värvi sokipaaride arv muutunud.

2. Teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused lõikuvad punktis H. Kiirel BH valitakse punkt D nii, et $|BD| = |BA|$, kiirel CH aga punkt E nii, et $|CE| = |CA|$. Leia nurga DAE suurus.

3. „Vanaisa, vanaisa, mis see on?“ „See on väike toru. Selle kaudu kulub basseini täitmiseks 3 tundi kauem kui suure toru kaudu.“ „Vanaisa, vanaisa, aga mis see on?“ „See on suur toru. Selle kaudu täitub bassein 3 korda kiiremini kui väikse toru kaudu.“ „Aga vanaisa, vanaisa, kui kaua kulub basseini täitmiseks mõlema toru kaudu korraga?“ „Sa, jõnglane, ära päri pidevalt! Oled mu surmani ära tüüdanud. Tee, et kaod!“

Kas lapselapsel on võimalik oma viimasele küsimusele siiski vastus leida ja kui jah, siis milline see on?

4. Positiivse täisarvu k *faktoriaaliks* nimetatakse arvu k ja kõigi temast väiksemate positiivsete täisarvude korrutist.

Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille puhul esimese n positiivse täisarvu faktoriaalide summa on mingi täisarvu ruut.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Laos on ainult suhkrupakid massiga 1 kg, 2 kg ja 5 kg. Nendes pakkides on kokku 2024 kg suhkrut. On teada, et pakkides massiga 5 kg on kokku samapalju suhkrut kui pakkides massiga 2 kg ning massiga 1 kg pakkide arv erineb 55 võrra ülejäänud pakkide koguarvust. Mitu suhkrupakki on laos kokku?

2. Iga varblane sööb 6 minutiga $\frac{1}{15}$ tervest mannapakist ning iga tuvi 3 minutiga $\frac{1}{9}$ tervest mannapakist. Mitme sekundiga söövad 20 varblast ja 24 tuvi koos terve paki mannat?

3. Kumb arvudest $3 \cdot 7^{98} \cdot 17^{200}$ ja $2^{296} \cdot 253^{100}$ on suurem?

4. Positiivset täisarvu n nimetame *eriliseks*, kui arv 2024 on esitatav summana kahest või enamast erinevast täisarvust, mis kõik sisalduvad arvus n. Näiteks arv 1996 on eriline, sest $2024 = 1996 + 19 + 9$.

Leia vähim eriline arv.

Märkus. Arv ei saa alata nulliga, mistõttu näiteks arvus 2006 olevad numbrite järjendid 006 ja 06 ei tule arvuna arvesse. Samuti ei tohi numbreid vahele jätta (näiteks 2006 ei sisalda arvu 206).

5. Ringjoonel keskpunktiga O valitakse mingid punktid A ja B. Olgu C punkti A peegeldus raadiusega OB ristuvast sirgest, mis läbib punkti O. On teada, et $\angle OAB = 37^\circ$. Leia nurga OCB suurus.

6. Tunni- ja minutiosutiga seinakell näitab korrektset kellaaega. Väike Juku väidab, et kui peegeldada tunniosuti numbrilaua keskpunkti läbiva horisontaalsirge suhtes ja minutiosuti numbrilaua keskpunkti läbiva vertikaalsirge suhtes, siis ei näitaks kell korrektset kellaaega. Tema kaksikvend Juhan aga ütleb, et kui peegeldada tunniosuti numbrilaua keskpunkti läbiva vertikaalsirge suhtes ja minutiosuti numbrilaua keskpunkti läbiva horisontaalsirge suhtes, siis oleks kella näit korrektne küll. Kas kellelgi poistest võib olla õigus? Kui jah, siis mis kellaaega võib kell parajasti näidata?

Märkus. Kella näit on *korrektne*, kui see on võimalik õigesti töötaval kellal (see ei pea väljendama parajasti õiget aega).

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Uue kolmeköitelise krimipõneviku „Surnud mehe laip“ teises köites on 100 lehekülge rohkem kui esimeses. Kolmanda köite 1 eksemplar ja teise köite 3 eksemplari sisaldavad kokku samapalju lehekülgi kui teise köite 1 eksemplar ja esimese köite 5 eksemplari. Peale selle on teada, et ühes köites on samapalju lehekülgi kui kahes ülejäänud köites kokku. Leia kõik võimalused, mitu lehekülge võivad sisaldada kõik kolm köidet kokku.

2. Karbis on 8 kohukest 2 sordist, kumbagi sorti kohukesi on võrdselt. Mihkel võtab karbist juhuslikult 2 kohukest välja. Kui suur on tõenäosus, et väljavõetud kohukesed on erinevast sordist, kui iga kohuke satub väljavõetavate hulka võrdse tõenäosusega?

3. Leia suurim ja vähim kümnekohaline arv, mis sisaldab kõiki numbreid ning jagub 11-ga.

4. Leia avaldise $\sqrt{2024 + 640\sqrt{10}} - \sqrt{1000}$ väärtus.

5. Teravnurkse kolmnurga ABC tippudest B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid on vastavalt E ja F. Nurkade EBF ja ECF poolitajad lõikuvad punktis P.

a) Leia nurga BPC suurus.

b) Tõesta, et $|PE| = |PF|$.

6. Tähti ja Arvi kirjutavad tahvlile vastavalt tähe- ja numbrijärjendeid. Tähti tahab koostada eesti tähestiku 27 tähest kõikvõimalikud 5-tähelised järjendid, milles kaks täishäälikut (a, e, i, o, u, õ, ä, ö, ü) poleks kõrvuti ja kõige viimane täht poleks täpitäht (õ, ä, ö, ü). Arvile meeldib väga number 3. Seetõttu soovib ta kirjutada Tähti järjendist 3 korda pikemaid numbrijärjendeid, kasutades vaid numbreid 1, 2 ja 3. Alati, kui Arvi järjendis on 3-ga jaguva järjekorranumbriga kohal number 3, siis eelmisel ega järgmisel 3-ga jaguva järjekorranumbriga kohal number 3 olla ei tohi. Samuti tahab Arvi, et kui tema järjend lõpeb 3-ga, siis viimase 3 numbri summa vähim algtegur poleks väiksem kui 3. Kas Arvi kirjutatavate järjendite arv on suurem, väiksem või niisama suur kui Tähti kirjutatavate järjendite arv?

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia kõik reaalarvud k, mille korral võrrandil

$$(k+1)x^2 + 90kx + k^2 = 0$$

leidub täpselt üks reaalarvuline lahend x.

2. Mängur veeretab korraga 3 ühesugust täringut. Igal täringul saab tulemuseks olla 1, 2, 3, 4, 5 või 6 silma. Mitu erinevat tulemust (silmade arvude kolmikut) võib mängur saada? Tulemused, mis erinevad täringute järjekorra poolest, loetakse samaks.

3. Artur kirjutab tahvlile kõik naturaalarvud 1 kuni 2023. Seejärel on tal võimalik teha kahte tüüpi käike. Esimest tüüpi käigu korral valib ta tahvlilt suvalised arvud x ja y, kustutab need ning kirjutab tahvlile arvu $x^5 + y$. Teist tüüpi käigu korral valib ta tahvlilt suvalised arvud x ja y, kustutab need ning kirjutab tahvlile arvud $32x + 7y^2 + 2y$ ja $59y - 7y^2 - x$. Kas Arturil on võimalik esimest ja teist tüüpi käike vabalt valitud järjestuses kasutades saavutada olukord, kus ainsana on tahvlile jäänud mingi positiivne arv, mille viimased neli numbrit on 2024?

4. Juku teostas õigesti murdude liitmistehte $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, kusjuures arvud a, b, c, d, e, f on kõik positiivsed. Kas on võimalik, et tehe jääb õigeks ka siis, kui igas murrus lugeja ja nimetaja ära vahetada (st kas on võimalik, et ka võrdus $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$ on tõene)?

5. Kolmnurgas ABC tõmmatakse mediaan AK. Kas võib kindlalt väita, et mediaani AK pikkus on väiksem kui:

a) külgede AB ja AC pikkuste aritmeetiline keskmine?

b) külgede AB ja AC pikkuste geomeetriline keskmine?

6. Tasandil märgitud n sirget lõikuvad kokku k erinevas punktis $P_1, \ldots, P_k$. Tähistagu p_i punktis P_i lõikuvate märgitud sirgete arvu. Tõesta võrratus

$$p_1^2 + \ldots + p_k^2 \leqslant 2n(n-1).$$

71-я Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2024 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 30 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

Код

1. Вычислить:

$$987 + 654 + 321 - 876 - 543 - 210 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. В записи $2024*$ нужно заменить звездочку одной цифрой так, чтобы полученное пятизначное число не делилось на числа 2, 3 и 5. Найти сумму всех таких цифр, которыми можно заменить звездочку.

. . . .

3. Четыре сэндвича и три напитка вместе стоят на 7 евро больше, чем стоят два сэндвича и один напиток вместе. Сколько всего нужно заплатить при покупке четырех сэндвичей и четырех напитков?

. . . .

4. Один мальчик и несколько девочек скушали целую пачку крекеров, в которой изначально было 150 крекеров. За то время, за которое мальчик съедал 3 крекера, каждая девочка съедала 2 крекера. Сколько всего девочек кушали крекеры, если мальчик съел $\frac{1}{5}$ часть всех крекеров?

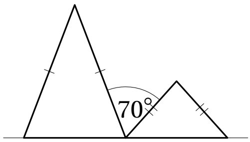
. . . .

5. Прямоугольник поделен на 6 маленьких прямоугольников. Внутри 3-х маленьких прямоугольников записаны их периметры. Найти периметр крайнего справа нижнего маленького прямоугольника.

8		10
7		?

. . . .

6. На рисунке два равнобедренных треугольника, у которых имеется общая вершина, и основания которых лежат на одной прямой. В одном из них величина угла при вершине равна α, а в другом величина угла при основании равна α. Указанный на рисунке угол между боковыми сторонами этих треугольников имеет величину 70°. Найти α.



. . . .

7. На числовой оси обозначены точки $A(20)$, $B(24)$ и C. Точка C находится в три раза дальше от точки A, чем от точки B. Найти все возможные координаты точки C.

. . . .

71-я Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2024 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 30 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

Код

1. Вычислить:

$$\frac{20 \cdot 24 + 24 \cdot 22}{21} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Между цифр

$$9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0$$

нужно поставить три знака плюс так, чтобы значение полученного выражения оказалось меньше числа 1000. Найти это значение.

. . . .

3. Три натуральных числа относятся как $2 : 3 : 4$, а их среднее арифметическое равняется числу 78. Найти наименьшее из этих трех чисел.

. . . .

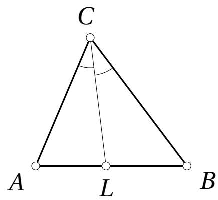
4. Коля забрал себе $\frac{2}{3}$ от всех имевшихся в коробке мандаринов. Затем Лиза забрала себе все оставшиеся в коробке мандарины и еще 8 мандаринов от Коли. В результате у Коли и Лизы оказалось равное количество мандаринов. Сколько мандаринов было изначально в коробке?

. . . .

5. На координатной плоскости изображен параллелограмм $ABCD$, три вершины которого $A(1;3)$, $B(2;0)$ и $C(4;1)$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

. . . .

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса CL. Известно, что сумма величин углов ACL и CAL равна 100°, а сумма величин углов BCL и BLC равна 130°. Найти величину наибольшего угла треугольника ABC.



. . . .

7. Сколько всего различных возможностей для перестановки букв в слове TOSIN так, чтобы ни одна буква не осталась на своем месте и не оказалась на месте соседней с ней буквы?

. . . .

71-я Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2024 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 30 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

Код

1. Вычислить:

$$(789 : 3 + 789 : 6) : (789 : 12) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. В результате умножения составленного из цифр A, B и C трехзначного числа на однозначное число D получается число 2024. Найти наибольшую возможную сумму цифр A, B, C и D.

. . . .

3. Пусть a, b и c положительные числа. Число a в 3 раза меньше суммы $b + c$, но в 3 раза больше разности $b - c$. Во сколько раз число b больше числа c?

. . . .

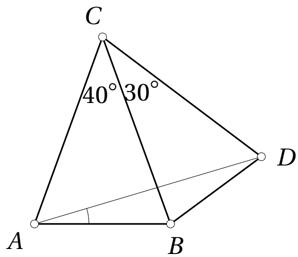
4. В двух коробках вместе ягод всего 120 штук. Известно, что 20% от количества ягод в одной коробке на 9 больше, чем 30% от количества ягод в другой коробке. Сколько всего ягод в той коробке, где их меньше?

. . . .

5. На высоте CL остроугольного треугольника ABC обозначена точка K. Известно, что $|AB| = 12$ см и $|CK| = 6$ см. Найти площадь четырехугольника $ACBK$.

. . . .

6. На рисунке треугольники ABC и BCD равнобедренные. Величины их углов при вершинах ACB и BCD равны соответственно 40° и 30°. Найти величину угла BAD.



. . . .

7. Числа x и y выбраны так, чтобы действовали равенства $|x| = |x + y| = 9$. Найти все возможные значения выражения $|x - y|$.

. . . .

71-я Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2024 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 3 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. В действии сложения

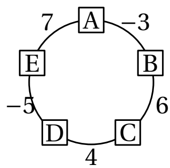
$$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D \\ + & & A & B & C \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

различным буквам соответствуют различные цифры, а одинаковым буквам всегда одинаковые цифры. Найти сумму цифр A, B, C и D.

2. В ряд записали 2024 последовательных натуральных числа. Наибольшее из записанных чисел оказалось в 8 раз больше наименьшего. Сколько всего цифр 7 записали в этом ряду?

3. В прямоугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна 5 см. На стороне AB выбрали точки K и L так, чтобы точка K была ближе к точке A. Площади треугольников CKL, CLB и AKD оказались равны соответственно 2 см^2, 2,5 см^2 и 3 см^2. Найти длину отрезка KL и величину угла CKL.

4. На окружности лежат 5 квадратов A, B, C, D и E. В один из этих квадратов записывают число 0, после чего начинают движение вдоль окружности по часовой стрелке. Добравшись до каждого следующего квадрата, в него записывают сумму двух чисел: числа, записанного в предыдущий квадрат, и числа, указанного около последней пройденной дуги окружности. После чего записанное в предыдущий квадрат число стирают. Действуя таким образом, через некоторое время в какой-то квадрат записывают число 2024. В каком квадрате может оказаться число 2024? Найти все возможности.



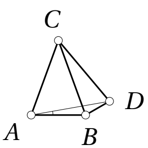
71-я Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2024 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 3 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. При входе в магазин у мамы с собой были только 1-евровые монеты и 5-евровые купюры. Всего у нее с собой было больше 50 евро, но меньше 100 евро. Выходя из магазина, денег у нее осталось в 3 раза меньше. Она заметила, что на выходе у нее осталось 5-евровых купюр столько же, сколько было 1-евровых монет при входе, а также на выходе 1-евровых монет осталось столько же, сколько было 5-евровых купюр при входе. Никаких других денег у нее не осталось. Сколько денег потратила мама в магазине?

2. Про расположенные рядом равнобедренные треугольники ABC и BCD известно, что угол при вершине ACB первого треугольника в 2 раза больше угла при вершине BCD второго треугольника. Величина угла BAD равна 10°.



а) Найти величины внутренних углов треугольника ABC.

б) Периметр четырехугольника $ABDC$ больше, меньше или имеет такую же величину по сравнению с тройной длиной отрезка AC?

3. Велосипедист из точки A в точку B ехал с постоянной скоростью 30 км/ч. Через 20 минут после выезда велосипедиста из точки A, из той же точки A выехал автомобиль, который двигался по тому же пути и с постоянной скоростью 90 км/ч. В тот момент, когда автомобиль догнал велосипедиста, он развернулся и поехал обратно в точку A с прежней скоростью. После остановки в точке A, которая длилась 40 минут, автомобиль с той же скоростью продолжил движение в точку B и добрался туда одновременно с велосипедистом. Найти длину пути из точки A в точку B.

4. В одной из угловых клеток клетчатой доски размером 7×7 изначально записано число 8. В каждый свой ход Юра выбирает одну пустую клетку доски, которая имеет общую сторону с той клеткой, где записано число, и записывает в нее сумму двух чисел: числа, записанного в соседней клетке, и остатка, который получается при делении порядкового номера данного хода при делении на число 6. После чего записанное в предыдущую клетку число Юра стирает. Описанные ходы Юра совершает некоторое время, и в какой-то момент после очередного хода останавливается. Сколько всего на доске различных клеток, в которые при подходящем наборе ходов Юра может в результате своего последнего хода записать число 2024?

71-я Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2024 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. У Миши было 7 пар синих носков, 7 пар красных носков и 7 пар зелёных носков. Миша хочет их постирать в своих 3-х стиральных машинах. Известно, что каждая стиральная машина при стирке съедает все зелёные носки и ровно один носок из каждой пары красных носков; синие носки ни одна стиральная машина при стирке не съедает. Найдите, сколькими разными способами возможно распределить носки между стиральными машинами так, чтобы выполнялись все следующие условия:

1) оба носка из каждой пары идут в одну и ту же стиральную машину;
2) в каждую стиральную машину идёт одно и то же число носков;
3) каждая стиральная машина съедает одно и то же число носков.

Два возможных распределения считаем различными, если в какой-то из стиральных машин число пар носков какого-то цвета отличается.

2. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H. На луче BH точка D выбрана так, что $|BD| = |BA|$, а на луче CH выбрана точка E так, что $|CE| = |CA|$. Найти величину угла DAE.

3. «Дедушка, дедушка, что это такое?» «Это маленькая труба. Чтобы наполнить бассейн через неё, потребуется на 3 часа больше времен, чем через большую трубу.» «Дедушка, дедушка, а это что такое?» «Это большая труба. Через неё бассейн наполняется в 3 раза быстрее, чем через маленькую трубу.» «Дедушка, дедушка, а сколько времени потребуется на заполнение бассейна через обе трубы одновременно?» «Ты, парень, не задавай постоянно вопросы! Ты меня до смерти утомил. Исчезни отсюда!»

Может ли внук найти ответ на свой последний вопрос, и, если да, то какой?

4. *Факториалом* положительного целого числа k называется произведение числа k и всех положительных чисел, меньших k.

Найти все положительные целые числа n, для которых сумма факториалов n первых натуральных чисел равна квадрату целого числа.

71-я Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2024 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. На складе есть только пакеты сахара массой 1 кг, 2 кг и 5 кг. Всего в этих пакетах содержится 2024 кг сахара. Известно, что в пакетах массой 5 кг содержится столько же сахара, сколько и в пакетах массой 2 кг, а количество пакетов массой 1 кг отличается на 55 от количества остальных пакетов. Сколько пакетов сахара находится на складе?
2. Каждый воробей съедает за 6 минут $\frac{1}{15}$ от целого пакета манной крупы, а каждый голубь за 3 минуты $\frac{1}{9}$ пакета. За сколько секунд 20 воробьёв и 24 голубя съедят вместе целый пакет манной крупы?
3. Какое из чисел $3 \cdot 7^{98} \cdot 17^{200}$ и $2^{296} \cdot 253^{100}$ больше?
4. Назовём положительное целое число n *особенным*, если число 2024 представимо в виде суммы двух или более различных целых чисел, которые все содержатся в числе n. (Например, число 1996 — особенное, поскольку $2024 = 1996 + 19 + 9$.) Найти наименьшее особенное число.
   Примечание. Число не может начинаться на ноль, поэтому, например, находящиеся в числе 2006 последовательности цифр 006 и 06 числами не считаются. Также нельзя пропускать цифры в числе (например, 2006 не содержит число 206).
5. На окружности с центром O выбираются точки A и B. Пусть C — отражение точки A относительно прямой, перпендикулярной радиусу OB и проходящей через точку O. Известно, что $\angle OAB = 37^\circ$. Найти величину углу OCB.
6. Настенные часы с часовой и минутной стрелками показывают корректное время. Маленькая Юля утверждает, что если зеркально отразить часовую стрелку относительно горизонтальной прямой, проходящей через центр циферблата, а минутную стрелку — относительно вертикальной проходящей через центр циферблата прямой, то часы не будут показывать корректное время. А её брат-близнец Юра утверждает, что если зеркально отразить часовую стрелку относительно проходящей через центр циферблата вертикальной прямой, а минутную — относительно проходящей через центр циферблата горизонтальной прямой, то часы будут показывать корректное время. Может ли кто-то из ребят быть прав? Если да, то какое время в данный момент могут показывать часы?
   Примечание. Время на часах *корректно*, если оно может быть получено на правильно работающих часах (не обязательно, чтобы оно соответствовало текущему времени).

71-я Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2024 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Во втором томе нового трёхтомного криминального триллера «Труп мертвеца» на 100 больше страниц, чем в первом. 1 экземпляр третьего тома и 3 экземпляра второго тома содержат вместе столько же страниц, сколько 1 экземпляр второго тома и 5 экземпляров первого. Также известно, что в одном томе столько же страниц сколько в других двух вместе. Найти все возможности, сколько страниц может содержаться в трёх томах вместе.

2. В коробке находятся 8 сырков 2-х сортов, поровну каждого сорта. Миша наугад достаёт из коробки 2 сырка. Какова вероятность того, что вынутые сырки будут разных сортов, если каждый сырок имеет равные шансы быть вынутым?

3. Найти наибольшее и наименьшее десятизначное число, которое содержит все цифры и делится на 11.

4. Найти значение выражения $\sqrt{2024 + 640\sqrt{10}} - \sqrt{1000}$.

5. Пусть E и F — основания высот, опущенных из вершин B и C, соответственно, в остроугольном треугольнике ABC. Биссектрисы углов EBF и ECF пересекаются в точке P.
   а) Найти величину угла BPC.
   б) Доказать, что $|PE| = |PF|$.

6. Таня и Артём пишут на доске последовательности букв и цифр, соответственно. Таня хочет составить из 27 букв эстонского алфавита все возможные 5-буквенные последовательности, в которых никакие две гласные (a, e, i, o, u, õ, ä, ö, ü) не стоят рядом и самая последняя буква не является умлаутом (õ, ä, ö, ü). Артёму очень нравится цифра 3. Поэтому он хочет записать последовательности цифр в три раза длиннее, чем у Тани, используя только цифры 1, 2 и 3. Каждый раз, когда в последовательности Артёма на позиции с порядковым номером, кратным 3, стоит цифра 3, на предыдущей и следующей позициях с порядковым номером, кратным 3, цифра 3 стоять не может. Также Артём хочет, чтобы если его последовательность заканчивается на 3, то наименьший простой делитель суммы 3 последних цифр был не меньше 3. Является ли количество последовательностей Артёма больше, меньше или равно количеству последовательностей, написанных Таней?

71-я Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2024 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все действительные числа k, при которых уравнение

$$(k+1)x^2 + 90kx + k^2 = 0$$

имеет ровно одно действительное решение x.

2. Игрок бросает одновременно 3 одинаковых игральных кости. У каждой кости результатом может быть 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очка. Сколько различных результатов (троек чисел очков) может получить игрок? Результаты, отличающиеся только порядком костей, считаются одинаковыми.

3. Артур записывает на доску все натуральные числа от 1 до 2023. Затем у него есть возможность делать ходы двух типов. В ходе первого типа он выбирает на доске произвольные числа x и y, стирает их и записывает на доску число $x^5 + y$. В ходе второго типа он выбирает на доске произвольные числа x и y, стирает их и записывает на доску числа $32x + 7y^2 + 2y$ и $59y - 7y^2 - x$. Может ли Артур, используя ходы первого и второго типа в любом порядке, добиться ситуации, когда на доске останется только какое-то положительное число, последние четыре цифры которого будут 2024?

4. Юра правильно выполнил операцию сложения дробей $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, где числа a, b, c, d, e, f все положительные. Может ли это равенство остаться верным, если в каждой дроби поменять местами числитель и знаменатель (т.е. возможно ли, что равенство $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$ также будет верным)?

5. В треугольнике ABC проведена медиана AK. Можно ли смело утверждать, что длина медианы AK меньше, чем:

а) арифметическое среднее длин сторон AB и AC?

б) геометрическое среднее длин сторон AB и AC?

6. Отмеченные на плоскости n прямых пересекаются в k различных точках $P_1, \ldots, P_k$. Обозначим за p_i число отмеченных прямых, пересекающихся в точке P_i. Доказать неравенство

$$p_1^2 + \ldots + p_k^2 \leqslant 2n(n-1).$$

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 333.

2. 12.

3. 14 eurot.

4. 6.

5. 9.

6. 40°.

7. 23, 26.

Lahendused

1. Kuna $987 - 876 = 654 - 543 = 321 - 210 = 111$, siis

$$987 + 654 + 321 - 876 - 543 - 210 = 3 \cdot 111 = 333.$$

2. Tärni kohale ei sobi paarisnumbrid ega 5, sest arv ei tohi jaguda 2-ga ega 5-ga. Kui tärni asemele panna 1, siis oleks saadava arvu ristsumma 9, mis jagub 3-ga. Seega jaguks ka arv ise 3-ga. Samuti jaguks saadav arv 3-ga, kui tärni asemele panna 7. Kui tärni asemele panna 3 või 9, siis ristsumma ei jaguks 3-ga. Kokkuvõttes on sobivad numbrid 3 ja 9. Nende summa on 12.

3. Neli vrappi ja kolm jooki ületab kaht vrappi ja üht jooki täpselt kahe vrapi ja kahe joogi võrra. Seega kaks vrappi ja kaks jooki maksab kokku 7 eurot. Neli vrappi ja neli jooki maksab kaks korda enam ehk 14 eurot.

4. Poiss sõi 150 kreekerist $\frac{1}{5}$ ehk 30 kreekerit. Tüdrukud sõid seega kokku $150 - 30$ ehk 120 kreekerit. Kuna iga tüdruk sõi 20 kreekerit sama ajaga kui poiss sõi oma 30 kreekerit, pidi tüdrukuid olema $\frac{120}{20}$ ehk 6.

5. Samas veerus asuvate ristkülikute ümbermõõdud erinevad parajasti kahekordse nende ristkülikute kõrguste erinevuse võrra, sest nende ristkülikute laiused on võrdsed. Vasakpoolse veeru ülemise ristküliku ümbermõõt on 1 võrra suurem alumise ristküliku ümbermõõdust. Seega ka parempoolse veeru ülemise ristküliku ümbermõõt on 1 võrra suurem alumise ristküliku ümbermõõdust, sest vastavad kõrgused on samad nagu vasakpoolses veerus. Järelikult alulmise parempoolse ristküliku ümbermõõt on $10 - 1$ ehk 9.

6. Kolmnurgas, mille tipunurga suurus on α, on alusnurga suurus $\frac{180^\circ - \alpha}{2}$ ehk $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Seega $\alpha + 70^\circ + \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 180^\circ$, kust $\alpha = 40^\circ$.

7. Punkt C saab asuda kas punktide A ja B vahel või punktist B paremal, sest punktid, mis asuvad punktist A vasakul, on punktile A lähemal kui punktile B. Kui punkt C asub punktide A ja B vahel, siis saame võrrandi $x - 20 = 3(24 - x)$, kust $x = 23$. Kui punkt C asub punktist B paremal, siis saame võrrandi $x - 20 = 3(x - 24)$, kust $x = 26$.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. 48.

2. 927.

3. 52.

4. 48.

5. 7.

6. 70°.

7. 4.

Lahendused

1. Lugejas saame

$$20 \cdot 24 + 24 \cdot 22 = 24 \cdot (20 + 22) = 24 \cdot 42 = 24 \cdot 2 \cdot 21 = 48 \cdot 21.$$

Seega $\dfrac{20 \cdot 24 + 24 \cdot 22}{21} = \dfrac{48 \cdot 21}{21} = 48$.

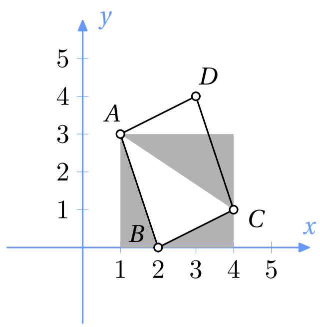
2. Kolm plussmärki jaotab numbrid 4 liidetavaks. Ükski liidetav ei tohi olla nelja- või enamakohaline, sest siis oleks avaldise väärtus suurem kui 1000. Kolmekohalisi liidetavaid ei tohi olla 3, sest nende vähim võimalik summa oleks $210 + 543 + 876$, mis on suurem kui 1000. Kui aga kolmekohalisi liidetavaid oleks 1, siis peaks ülejäänud 7 numbrit jagunema 3 vähemakohalise liidetava vahel, mis pole võimalik. Samuti kui kolmekohalisi liidetavaid oleks 0, siis peaks 10 numbrit jagunema 4 vähemakohalise liidetava vahel ja see pole võimalik. Seega ainus variant on, et kolmekohalisi liidetavaid on 2. Sel juhul jääb üle 4 numbrit, mis peavad jagunema 2 vähemakohalise liidetava vahel. Ainus võimalus on, et ülejäänud 2 liidetavat on kahekohalised.

Kui suurem kolmekohaline liidetav oleks 987 või 876, siis isegi koos vähima võimaliku kolmekohalise liidetavaga 210 oleks summa suurem kui 1000. Kui suurem kolmekohaline liidetav oleks 765, siis üks kahekohaline liidetav peaks olema 98. Koos vähima võimaliku kolmekohalise liidetavaga 210 oleks summa jällegi suurem kui 1000. Suurem kolmekohaline liidetav ei saa olla 654, sest numbritest 9, 8 ja 7 jääks üks kasutamata. Seega on ainus võimalus, et kolmekohalised liidetavad on 543 ja 210 ning kahekohalised liidetavad 98 ja 76. Nende nelja arvu summa on 927.

3. Need kolm naturaalarvu avalduvad kujul $2a, 3a, 4a$. Siit $\dfrac{2a + 3a + 4a}{3} = 78$ ehk $3a = 78$, mis annab $a = 26$. Vähim kolmest arvust on siis $2 \cdot 26$ ehk 52.

4. Olgu algul karbis x mandariini. Pärast seda, kui lapsed olid võtnud karbi tühjaks ja Kevin oli andnud Liisale 8 mandariini, oli Kevinil $\frac{2}{3}x - 8$ ja Liisal $x - \frac{2}{3}x + 8$ mandariini. Seega $\frac{2}{3}x - 8 = x - \frac{2}{3}x + 8$, kust $\frac{1}{3}x = 16$ ehk $x = 48$.

5. Kolmnurk ABC moodustab poole rööpküliku $ABCD$ pindalast. Kolmnurk ABC jääb järele, kui eemaldada ruudust küljepikkusega 3 kolm kolmnurka (joonisel 1 halliks värvitud). Kolmnurga ABC pindala on sellest tulenevalt $3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$ ehk $\frac{7}{2}$. Rööpküliku $ABCD$ pindala on siis 7.



Joonis 1

6. Kolmnurgas BCL saame

$$\angle CBL = 180^\circ - (\angle BCL + \angle BLC) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ.$$

Kolmnurgas ABC saame nüüd

$$\angle ACB + \angle BAC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

Kuna aga $\angle ACL + \angle BAC = \angle ACL + \angle CAL = 100^\circ$, siis

$$\angle BCL = \angle ACB - \angle ACL = 130^\circ - 100^\circ = 30^\circ.$$

Seega $\angle ACB = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, sest CL on nurgapoolitaja. Sellest tulenevalt $\angle BAC = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$ ja see on kolmnurga ABC nurkadest suurim.

7. Täht S saab minna kas esimeseks või viimaseks. Kui täht S läheb esimeseks, siis täht I peab minema teiseks ja täht N kolmandaks. Tähed T ja O lähevad kahele viimasele kohale emmas-kummas järjestuses. Seega võimalusi, kus täht S läheb esimeseks, on 2. Sümmeetria tõttu on võimalusi, kus täht S läheb viimaseks, samuti 2. Järelikult on otsitavaid ümberjärjestusi kokku 4.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 6.
2. 18.
3. 1,25.
4. 30.
5. 36 cm^2.
6. 15°.
7. 9, 27.

Lahendused

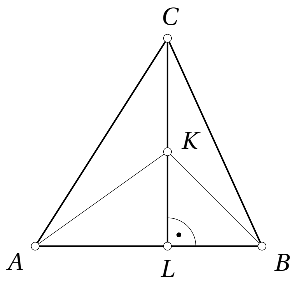
1. Kirjutades tehte ümber murdudega ja taandades arvuga 789, saame võrdväärse avaldise $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}}$. Selle murru lugeja on $\frac{1}{2}$ ja nimetaja $\frac{1}{12}$, seega murru väärtus on 12 : 2 ehk 6.

2. Arvu 2024 kanooniline esitus on $2^3 \cdot 11 \cdot 23$, mistõttu tema ühekohalised tegurid on $1, 2, 4, 8$. Jagamisel teguritega 1 ja 2 tekib neljakohaline jagatis. Jagamisel teguriga 4 või 8 tekib vastavalt jagatis 506 või 253. Esimesel juhul on vaadeldav numbrite summa $5+0+6+4$ ehk 15, teisel juhul aga $2+5+3+8$ ehk 18. Suurem neist on 18.

3. Kuna $a = \frac{b+c}{3} = 3(b-c)$, siis $b+c = 9(b-c)$. Siit $8b = 10c$, millest saame $b = \frac{5}{4}c$.

4. Olgu teises karbis x mustikat; siis esimeses karbis on $120-x$ mustikat. Ülesande tingimustest saame võrrandi $0{,}2(120-x) = 0{,}3x + 9$, mille lahend on $x = 30$. Seega teises karbis on 30 ja esimeses 90 mustikat. Teise karbi mustikate arv on väiksem.

5. Nelinurga $ACBK$ pindala võrdub kolmnurkade ACK ja BCK pindalade summaga (joonis 2). Võttes mõlema kolmnurga aluseks CK, on kõrgused vastavalt AL ja BL. Nelinurga $ACBK$ pindala on $\frac{1}{2} \cdot |CK| \cdot |AL| + \frac{1}{2} \cdot |CK| \cdot |BL|$ ehk $\frac{1}{2} \cdot |CK| \cdot (|AL| + |BL|)$ ehk $\frac{1}{2} \cdot |CK| \cdot |AB|$. Kuna $|AB| = 12$ cm ja $|CK| = 6$ cm, siis nelinurga $ACBK$ pindala on $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12$ ehk 36 ruutsentimeetrit.



Joonis 2

6. Kolmnurga ABC alusnurga suurus on $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2}$ ehk 70°. Arvestades, et $|AC| = |BC| = |CD|$, on võrdhaarne ka kolmnurk ACD ja tema tipunurga suurus on $40^\circ + 30^\circ$ ehk 70°. Seega kolmnurga ACD alusnurga suurus on $\frac{180^\circ - 70^\circ}{2}$ ehk 55°. Järelikult $\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 70^\circ - 55^\circ = 15^\circ$.

7. On kaks võimalust, kas $x = x + y$ või $x = -(x + y)$. Esimesel juhul $y = 0$; siis $|x - y| = |x| = 9$. Teisel juhul $y = -2x$; siis

$$|x - y| = |x - (-2x)| = |3x| = 3|x| = 3 \cdot 9 = 27.$$

II osa lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Liitmistehtes

$$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D \\ + & & A & B & C \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

vastavad erinevatele tähtedele erinevad numbrid ja samale tähele kõikjal sama number. Leia numbrite A, B, C ja D summa.

Vastus: 13.

Lahendus. Tuhandelistest saame $A = 1$ või $A = 2$ sõltuvalt sellest, kas sajalistest tekib ülekanne või mitte. Kui $A = 2$, siis sajalistest saaksime $B + A \leqslant 0$ ehk $B \leqslant -2$, mis pole võimalik. Seega $A = 1$. Sajalistest saame nüüd $B + A = 9$ või $B + A = 10$ sõltuvalt sellest, kas kümnelistest tekib ülekanne või mitte. Kui $B + A = 10$, siis $B = 9$ ja kümnelistest saaksime $C + B \leqslant 2$ ehk $C \leqslant -7$, mis pole võimalik. Seega $B + A = 9$ ehk $B = 8$. Kümnelistest saame nüüd $C + B = 11$ või $C + B = 12$ sõltuvalt sellest, kas ühelistest tekib ülekanne või mitte. Kui $C + B = 12$, siis $C = 4$ ja ühelistest saame $D = 0$. Kui $C + B = 11$, siis $C = 3$ ja ühelistest saaksime $D = 11$, mis pole võimalik. Järelikult $A + B + C + D = 1 + 8 + 4 + 0 = 13$.

2. *(Maksim Ivanov)*

Ritta kirjutatakse 2024 järjestikust naturaalarvu. Neist suurim on vähimast 8 korda suurem. Mitu numbrit 7 on selles reas kokku?

Vastus: 602.

Lahendus. Olgu x ritta kirjutatavatest naturaalarvudest vähim. Siis suurim neist on $x + 2023$. Ülesande tingimuse põhjal $8x = x + 2023$, kust $x = \dfrac{2023}{7} = 289$. Seega ritta kirjutatakse arvud $289, 290, \ldots, 2312$.

Loendame numbrid 7 kümnendkohtade kaupa. Tuhandeliste kohal neid pole, sest reas esinevad tuhandeliste kohal vaid numbrid 1 ja 2. Sajaliste kohal on number 7 parajasti arvudes $700, 701, \ldots, 799$ ja $1700, 1701, \ldots, 1799$, mida on kokku 200 tükki. Sarnaselt esinevad arvud, milles number 7 on kümneliste kohal, 10-liikmeliste rühmadena. Esimene rühm sisaldab arvud $370, 371, \ldots, 379$, viimane rühm aga arvud $2270, 2271, \ldots, 2279$. Neid rühmi on 20, mistõttu neis rühmades kokku on kümneliste numbreid $20 \cdot 10$ ehk 200. Lõpuks üheliste kohal on number 7 igas kümnendas arvus, millest esimene on 297 ja viimane 2307. Neid arve on 202. Kokku esineb number 7 järelikult $200 + 200 + 202$ ehk 602 korda.

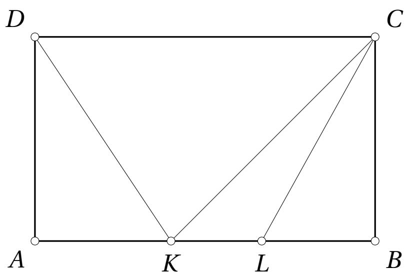
3. *(Maksim Ivanov)*

Ristküliku $ABCD$ küljel AB pikkusega 5 cm valitakse punktid K ja L nii, et punkt K on punktile A lähem. Kolmnurkade CKL, CLB ja AKD pindalad on vastavalt 2 cm^2, 2,5 cm^2 ja 3 cm^2. Leia lõigu KL pikkus ja nurga CKL suurus.

Vastus: $|KL| = \frac{4}{3}$ cm, $\angle CKL = 45^\circ$.

Lahendus 1. Kolmnurga CKD pindala on pool ristküliku $ABCD$ pindalast (joonis 3). Seega ülejäänud osa pindala moodustab ristküliku $ABCD$ pindalast samuti poole. See ülejäänud osa moodustub aga kolmnurkadest CKL, CLB ja AKD. Järelikult ristküliku $ABCD$ pindala on $2(2 + 2{,}5 + 3)$ ehk 15 ruutsentimeetrit. Kuna $|AB| = 5$ cm, siis $|AD| = |BC| = 3$ cm.

Kolmnurga CKL pindala avaldub aluse ja kõrguse poole korrutisena kujul $\frac{1}{2} \cdot |KL| \cdot |BC|$. Seega $\frac{1}{2} \cdot |KL| \cdot |BC| = 2$ cm^2, mis $|BC| = 3$ cm tõttu annab $|KL| = \frac{4}{3}$ cm. Samuti saame $\frac{1}{2} \cdot |BL| \cdot |BC| = 2{,}5$ cm^2, kust $|BL| = \frac{5}{3}$ cm. Järelikult $|BK| = |KL| + |BK| = \frac{4+5}{3}$ cm $= 3$ cm $= |BC|$, millest tulenevalt on BCK võrdhaarne täisnurkne kolmnurk. Seega $\angle CKL = \angle BKC = 45^\circ$.



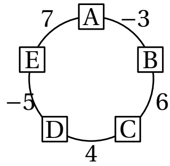
Joonis 3

Lahendus 2. Kolmnurkadel CKL, CLB ja AKD on ühine kõrgus BC (joonis 3). Seega nende alused suhtuvad nagu pindalad. See tähendab, et lõikude KL, LB ja AK pikkused avalduvad kujul $2a$, $2{,}5a$ ja $3a$ mingi a jaoks. Ühelt poolt $2a + 2{,}5a + 3a = |KL| + |LB| + |AK| = |AB| = 5$ cm, teisalt aga $2a + 2{,}5a + 3a = 7{,}5a$. Võrdusest $7{,}5a = 5$ cm saame $a = \frac{2}{3}$ cm. Seega $|KL| = \frac{4}{3}$ cm ja $|BL| = \frac{5}{3}$ cm.

Järelikult $|BK| = |KL| + |BK| = \dfrac{4+5}{3}$ cm $= 3$ cm. Kolmnurga CKL pindalast $2\ \mathrm{cm}^2$ ja aluse pikkusest $\dfrac{4}{3}$ cm saame aga kõrguseks $\dfrac{2}{\frac{4}{3}} \cdot 2$ ehk 3 sentimeetrit. Seega ka $|BC| = 3$ cm, millest tulenevalt on BCK võrdhaarne täisnurkne kolmnurk. Seega $\angle CKL = \angle BKC = 45^\circ$.

4. *(Maksim Ivanov)*

Ringjoonel on 5 ruutu A, B, C, D ja E. Ühte neist ruutudest kirjutatakse arv 0 ja hakatakse seejärel mööda ringjoont päripäeva liikuma. Igasse järgnevasse ruutu jõudmisel kirjutatakse sinna eelmises ruudus oleva arvu ja ringjoone viimati läbitud kaarele märgitud arvu summa ning kustutatakse arv eelmisest ruudust. Nii toimides tekib mingi aja järel olukord, kus mingisse ruutu kirjutatakse arv 2024. Leia kõik võimalused, milline ruut see saab olla.



Vastus: B, E.

Lahendus. Kuna kaartele kirjutatud arvude summa on 9, siis iga täisringi läbimise järel kirjutatakse samasse ruutu 9 võrra suurem arv. Ruutu, millesse algul kirjutatakse arv 0, kirjutatakse järelikult kõik naturaalarvulised 9 kordsed ja ainult need. Vaatame läbi kõik juhud.

- Kui 2024 tekiks ruutu A, siis tekiks sellele eelneval ringil ruutu E arv 2017, ruutu D arv 2022, ruutu C arv 2018 ja ruutu B arv 2012. Ükski neist pole 9 kordne.
- Kui 2024 tekiks ruutu B, siis tekiks sellele eelneval ringil ruutu A arv 2027, ruutu E arv 2020 ja ruutu D arv 2025. Kuna viimane jagub 9-ga, siis see juht on võimalik.
- Kui 2024 tekiks ruutu C, siis tekiks sellele eelneval ringil ruutu B arv 2018, ruutu A arv 2021, ruutu E arv 2014 ja ruutu D arv 2019. Ükski neist pole 9 kordne.
- Kui 2024 tekiks ruutu D, siis tekiks sellele eelneval ringil ruutu C arv 2020, ruutu B arv 2014, ruutu A arv 2017 ja ruutu E arv 2010. Ükski neist pole 9 kordne.
- Kui 2024 tekiks ruutu E, siis tekiks sellele eelneval ringil ruutu D arv 2029 ja ruutu C arv 2025. Kuna viimane jagub 9-ga, siis see juht on võimalik.

Kokkuvõttes võib küsitud ruut olla kas B või E.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa lahendused

1. *(Urve Kangro)*

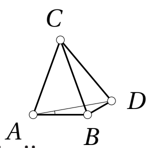
Emal oli poodi minnes kaasas ainult 1-euroseid ja 5-euroseid, kokku üle 50 euro, kuid alla 100 euro. Kui ta tagasi tuli, oli tal raha 3 korda vähem. Ta pani tähele, et tal oli järel samapalju 5-euroseid kui enne oli 1-euroseid ja samapalju 1-euroseid kui enne oli 5-euroseid ning rohkem raha polnud. Kui palju raha ema poes ära kulutas?

Vastus: 48 eurot.

Lahendus. Olgu emal algul 1-euroseid a tükki ja 5-euroseid b tükki. Siis on tal algul $a + 5b$ eurot ja pärast $5a + b$ eurot. Seega $3(5a + b) = a + 5b$ ehk $7a = b$. Järelikult oli emal algul $a + 5 \cdot 7a$ ehk $36a$ eurot. Arvu 36 ainus kordne, mis on 50 ja 100 vahel, on $36 \cdot 2$ ehk 72. Seega emal oli algul 72 eurot. Pärast oli emal raha 3 korda vähem ehk 24 eurot. Seega kulutas ema poes $72 - 24$ ehk 48 eurot.

2. *(Maksim Ivanov)*

Kõrvuti paiknevate võrdhaarsete kolmnurkade ABC ja BCD tipunurkadest ACB ja BCD esimene on teisest 2 korda suurem. Nurga BAD suurus on 10°.



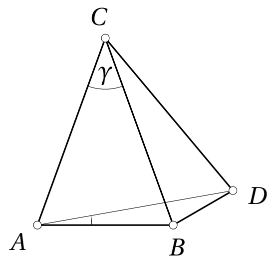
a) Leia kolmnurga ABC sisenurkade suurused.

b) Kas nelinurga $ABDC$ ümbermõõt on suurem, väiksem või niisama suur kui kolmekordse lõigu AC pikkus?

Vastus: a) $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$; b) suurem.

Lahendus. Olgu $\angle ACB = \gamma$ (joonis 4); siis $\angle BAC = \dfrac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\gamma$. Samas $\angle BCD = \dfrac{1}{2}\gamma$. Kuna $|AC| = |BC| = |DC|$, siis kolmnurk ACD on võrdhaarne tipunurgaga tipu C juures. Kolmnurga ACD tipunurga suurus on $\gamma + \dfrac{1}{2}\gamma$ ehk $\dfrac{3}{2}\gamma$. Seega $\angle DAC = \dfrac{180^\circ - \frac{3}{2}\gamma}{2}$ ehk $90^\circ - \dfrac{3}{4}\gamma$. Saame $\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = \left(90^\circ - \dfrac{1}{2}\gamma\right) - \left(90^\circ - \dfrac{3}{4}\gamma\right) = \dfrac{1}{4}\gamma$. Ülesande tingimuse põhjal aga $\angle BAD = 10^\circ$. Võrrandist $\dfrac{1}{4}\gamma = 10^\circ$ saame $\gamma = 40^\circ$.

a) Kolmnurga ABC sisenurkade suurused on eelneva põhjal $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$.



Joonis 4

b) Eelneva põhjal $\angle ACD = \frac{3}{2} \cdot 40^\circ = 60^\circ$. Seega kolmnurk ACD on võrdkülgne, millest tulenevalt $|DA| = |AC| = |CD|$. Kolmekordne lõigu AC pikkus võrdub seega parajasti kolmnurga ACD ümbermõõduga. Nelinurga $ABDC$ ümbermõõt on kolmnurga ACD ümbermõõdust suurem, sest küljed DC ja CA on ühised, kuid sirglõigu AD asemel ühendab nelinurga $ABDC$ piirjoon tipud A ja D läbi tipu B.

3. *(Maksim Ivanov)*

Jalgrattur sõitis punktist A punkti B ühtlase kiirusega 30 km/h. Punktist A aga alustas 20 minutit pärast jalgratturi väljumist sõitu auto, mis liikus sama teed pidi kogu aeg kiirusega 90 km/h. Kui auto jõudis jalgratturile järele, pööras auto ümber ja sõitis endise kiirusega tagasi punkti A. Pärast 40 minutit kestnud peatust punktis A suundus auto endise kiirusega punkti B ja jõudis sinna jalgratturiga samal ajal. Leia punktide A ja B vaheline kaugus.

Vastus: 60 km.

Lahendus 1. Olgu C punkt, kus auto jõudis esmakordselt jalgratturile järele. Olgu punktide A ja C vaheline kaugus s_1 kilomeetrit ja punktide C ja B vaheline kaugus s_2 kilomeetrit. Siis jalgratturil kulus punktist A punkti C jõudmiseks $\frac{s_1}{30}$ tundi, autol aga $\frac{s_1}{90}$ tundi. Kuna 20 minutit on $\frac{1}{3}$ tundi, siis saame võrrandi $\frac{s_1}{30} = \frac{1}{3} + \frac{s_1}{90}$, kust $s_1 = 15$.

Jalgratturil kulus punktist C punkti B jõudmiseks $\frac{s_2}{30}$ tundi, autol aga $\frac{s_2}{90}$ tundi. Kuid auto pöördus algul tagasi punkti A ja kattis seetõttu topelt punktide A ja C vahelise teelõigu. Selleks kulus $2 \cdot \frac{s_1}{90}$ tundi, mis võrdust $s_1 = 15$ arvestades teeb $\frac{1}{3}$ tundi. Lisaks pidas auto $\frac{2}{3}$ tundi pausi. Siit saame võrrandi $\frac{s_2}{30} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{s_2}{90}$, mille lahendamisel saame $s_2 = 45$.

Seega punktide A ja B vaheline kaugus on $15 + 45$ ehk 60 kilomeetrit.

Lahendus 2. Olgu C punkt, kus auto jõudis esmakordselt jalgratturile järele. Kulugu jalgratturil t_1 tundi jõudmaks punktist A punkti C ja t tundi jõudmaks punktist A punkti B. Siis punktide A ja C vaheline kaugus on $30t_1$ kilomeetrit ja auto läbib selle $\frac{30t_1}{90}$ ehk $\frac{1}{3}t_1$ tunniga. Seega auto pidi sõitu alustama $t_1 - \frac{1}{3}t_1$ ehk $\frac{2}{3}t_1$ tundi jalgratturist hiljem. Ülesande tingimuse põhjal on see aeg 20 minutit ehk $\frac{1}{3}$ tundi. Seega $\frac{2}{3}t_1 = \frac{1}{3}$, kust $t_1 = \frac{1}{2}$. Seega auto kattis punktide A ja C vahemaa $\frac{1}{6}$ tunniga.

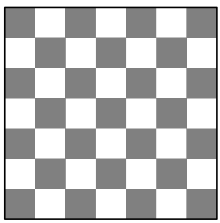
Samuti näeme, et punktide A ja B vaheline kaugus on $30t$ kilomeetrit ja auto läbib selle $\frac{30t}{90}$ ehk $\frac{1}{3}t$ tunniga. Kuna auto käis alguses punktis C ja lisaks seisis $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ tundi, saame võrrandi $t = \frac{1}{3}t + 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$, kust $t = 2$. Järelikult punktide A ja B vaheline kaugus on $30 \cdot 2$ ehk 60 kilomeetrit.

4. *(Maksim Ivanov)*

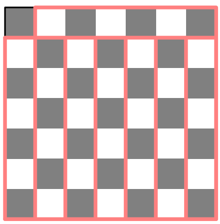
Ruudustikus mõõtmetega 7×7 on ühte nurgaruutu alguses kirjutatud arv 8. Igal käigul valib Juku tühja ühikruudu, millega ühist külge omaval ruudul on arv, ja kirjutab sinna tehtava käigu järjekorranumbri jagamisel 6-ga tekkiva jäägi ja naaberruudul oleva arvu summa, kusjuures naaberruudul oleva arvu ta kustutab. Nii toimib Juku mõnda aega, kuni pärast järjekordset käiku ta lõpetab. Kui palju on erinevaid ühikruute, millesse Juku saab käike sobivalt valides kirjutada viimasel käigul arvu 2024?

Vastus: 24.

Lahendus. Arvuga 6 jagamisel tekkivad jäägid on 1, 2, 3, 4, 5 ja 0 ning need korduvad järjekorranumbri suurenedes tsükliliselt selles järjestuses. Ühe tsükli jääkide summa on 15. Seega iga 6 käigu järel kirjutab Juku ruudustikule 15 võrra suurema arvu. Kuna $2010 = 134 \cdot 15$ ja alguses on ruudustikul arv 8, siis pärast 134 täistsüklit on ruudustikul arv 2018. Sellest saame arvu 2024 täpselt 3 käigu järel. Järelikult käikude koguarv on $134 \cdot 6 + 3$ ehk 807.



Joonis 5



Joonis 6

Värvime ruudustiku ruudud malekorras mustaks ja valgeks nii, et nurgaruudud on mustad (joonis 5). Igal käigul kirjutatakse arv eelmisega vastasvärvi ruudule. Kuna käikude arv on paaritu, siis viimasel käigul kirjutatakse arv valgele ruudule. Jättes ühe nurgaruudu välja, saab ülejäänud ruudustiku jaotada ribadeks mõõtmetega 1×6 ja 6×1, kus on võrdselt musti ja valgeid ruute (joonisel 6 punasega raamitud). Seega valgeid ruute on kokku $\frac{7^2 - 1}{2}$ ehk 24. Igat valget ruutu on võimalik lõpuruuduks saada, kui liikuda alguses ülimalt $6 + 5$ käiguga sellele ruudule ja seejärel hakata selle ja mõne naaberruudu vahel edasi-tagasi pendeldama.

II osa lahendused

1. *(Andres Alumets)*

Martinil on 7 paari siniseid sokke, 7 paari punaseid sokke ja 7 paari rohelisi sokke. Martin tahab need kõik ära pesta oma 3 pesumasinaga. On teada, et iga pesumasin sööb pestes ära kõik rohelised sokid ja täpselt ühe soki igast punaste sokkide paarist; siniseid sokke ükski pesumasin ei söö. Leia, mitmel eri viisil on võimalik sokid pesumasinate vahel ära jagada nii, et kehtiksid kõik järgnevad tingimused:

1) iga paari mõlemad sokid lähevad samasse pesumasinasse;
2) igasse pesumasinasse läheb üks ja sama arv sokke;
3) iga pesumasin sööb ühe ja sama arvu sokke ära.

Kaks jaotamise viisi loeme erinevaks siis, kui mõnes pesumasinas on mingit värvi sokipaaride arv muutunud.

Vastus: 6.

Lahendus 1. Kokku on sokipaare 21, seega igasse pesumasinasse peab tingimuste 1 ja 2 põhjal minema 7 paari. Kokku söövad pesumasinad kolme peale ära $7 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 2$ ehk 21 sokki; et kõik ühepalju sööks, peab iga pesumasin sööma 7 sokki. Kuna igast sinisest ja rohelisest sokipaarist sööb iga pesumasin paarisarvu sokke ja igast punasest sokipaarist paaritu arvu, siis tuleb igasse pesumasinasse panna paaritu arv punaste sokkide paare. Võimalusi jagada 7 paari punaseid sokke 3 pesumasina vahel nii, et igasse pesumasinasse läheb paaritu arv paare, on 6:

$$\begin{aligned} 5 &+ 1 + 1,\\ 3 &+ 3 + 1,\\ 3 &+ 1 + 3,\\ 1 &+ 5 + 1,\\ 1 &+ 3 + 3,\\ 1 &+ 1 + 5. \end{aligned}$$

Igaüks neist võimalustest määrab ülejäänud sokipaaride jaotuse üheselt, sest rohelised sokid tuleb jaotada nii, et kokku sööks pesumasin 7 sokki (5, 3 ja 1 punasele sokipaarile tuleb lisada vastavalt 1, 2 ja 3 rohelist sokipaari ja see mahub lubatud 7 paari sisse ära), ning sinised sokid tuleb jaotada nii, et igas pesumasinas on kokku 7 paari sokke. Seega kokku on 6 võimalust sokke nõutud viisil jaotada.

Lahendus 2. Kokku on sokipaare 21, seega igasse pesumasinasse peab tingimuste 1 ja 2 põhjal minema 7 paari. Kokku söövad pesumasinad kolme peale ära $7 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 2$ ehk 21 sokki; et kõik ühepalju sööks, peab iga pesumasin sööma 7 sokki. Kuna iga masin sööb kõik rohelised sokid ära, siis ei tohi ühessegi pesumasinasse minna üle 3 paari rohelisi sokke. Samas peab igasse pesumasinasse minema vähemalt 1 paar rohelisi sokke, sest kui mõnesse pesumasinasse ei läheks ühtki roheliste sokkide paari, siis jääks ühte ülejäänud pesumasinatest vähemalt 4 paari rohelisi sokke. Võimalusi jagada 7 paari rohelisi sokke 3 pesumasina vahel nii, et igasse pesumasinasse läheb 1, 2 või 3 paari, on 6:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & + & 3 & + & 1, \\ 3 & + & 2 & + & 2, \\ 3 & + & 1 & + & 3, \\ 2 & + & 3 & + & 2, \\ 2 & + & 2 & + & 3, \\ 1 & + & 3 & + & 3. \end{array}$$

Igaüks neist võimalustest määrab ülejäänud sokipaaride jaotuse üheselt, sest punased sokid tuleb jaotada nii, et kokku sööks pesumasin 7 sokki (3, 2 ja 1 rohelisele sokipaarile tuleb lisada vastavalt 1, 3 ja 5 punast sokipaari ja see mahub lubatud 7 paari sisse ära), ning sinised sokid tuleb jaotada nii, et igas pesumasinas on kokku 7 paari sokke. Seega kokku on 6 võimalust sokke nõutud viisil jaotada.

2. *(Aleksei Ganyukov)*

Teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused lõikuvad punktis H. Kiirel BH valitakse punkt D nii, et $|BD| = |BA|$, kiirel CH aga punkt E nii, et $|CE| = |CA|$. Leia nurga DAE suurus.

Vastus: 90°.

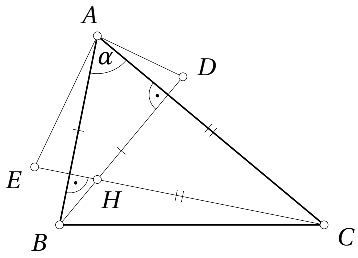
Lahendus 1. Tähistame $\angle BAC = \alpha$. Kuna kiir BD sisaldab kolmnurga ABC kõrgust (joonis 7), saame $\angle ABD = 90^\circ - \alpha$. Et $|BD| = |BA|$, siis kolmnurk ABD on võrdhaarne ning

$$\angle BAD = \angle BDA = \frac{180^\circ - \angle ABD}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ + \alpha}{2} = \frac{90^\circ + \alpha}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Järelikult $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 45^\circ + \dfrac{\alpha}{2} - \alpha = 45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

Samamoodi saame $\angle BAE = 45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Kokkuvõttes seega

$$\angle DAE = \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha + \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ.$$



Joonis 7

Lahendus 2. Olgu võrdhaarsete kolmnurkade ABD ja ACE alusnurga suurused vastavalt β ja γ. Siis

$$\angle DAE = \angle DAB + \angle BAE = \angle DAB + \left(90^\circ - \angle CEA\right) = 90^\circ + \beta - \gamma.$$

Nüüd paneme tähele, et kuna punkt D asub kõrguse BH pikendusel, siis $\angle ABD = 90^\circ - \angle BAC$, ja kuna punkt E asub kõrguse CH pikendusel, siis $\angle ACE = 90^\circ - \angle BAC$. Seega $\angle ABD = \angle ACE$. Kuna võrdhaarsete kolmnurkade tipunurgad on võrdsed, on võrdsed ka nende alusnurgad ehk $\beta = \gamma$. Kokkuvõttes $\angle DAE = 90^\circ + \beta - \gamma = 90^\circ$.

Lahendus 3. Nagu lahenduses 2, tähistame kolmnurkade ABD ja ACD alusnurga suurused vastavalt β ja γ ning leiame $\angle DAE = 90^\circ + \beta - \gamma$. Samamoodi saab avaldada, et $\angle DAE = 90^\circ + \gamma - \beta$. Niisiis $\beta - \gamma = \gamma - \beta$, millest saame $\beta = \gamma$. Kokkuvõttes $\angle DAE = 90^\circ + \beta - \gamma = 90^\circ$.

3. *(Härmel Nestra)*

„Vanaisa, vanaisa, mis see on?“ „See on väike toru. Selle kaudu kulub basseini täitmiseks 3 tundi kauem kui suure toru kaudu.“ „Vanaisa, vanaisa, aga mis see on?“ „See on suur toru. Selle kaudu täitub bassein 3 korda kiiremini kui väikse toru kaudu.“ „Aga vanaisa, vanaisa, kui kaua kulub basseini täitmiseks mõlema toru kaudu korraga?“ „Sa, jõnglane, ära päri pidevalt! Oled mu surmani ära tüüdanud. Tee, et kaod!“

Kas lapselapsel on võimalik oma viimasele küsimusele siiski vastus leida ja kui jah, siis milline see on?

Vastus: jah, $\frac{9}{8}$ tundi.

Lahendus. Basseini täitumise aeg väikse toru kaudu on 3 korda ja samas 3 tunni võrra pikem kui basseini täitumise aeg suure toru kaudu. Seega 3 tundi võrdub basseini suure toru kaudu täitumise 3-kordse ja 1-kordse aja vahega. See vahe võrdub basseini suure toru kaudu täitumise 2-kordse ajaga. Järelikult kulub basseini täitumiseks suure toru kaudu $\frac{3}{2}$ tundi ning väikse toru kaudu $3 \cdot \frac{3}{2}$ ehk $\frac{9}{2}$ tundi.

Eelneva põhjal kuluks 2 basseini täitmiseks suure toru kaudu 3 tundi ja väikse toru kaudu 9 tundi, mis teeb vee vooluhulgaks suures torus $\frac{2}{3}$ basseinitäit tunnis ja väikses torus $\frac{2}{9}$ basseinitäit tunnis. Mõlemas torus kokku on vooluhulk $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}$ ehk $\frac{8}{9}$ basseinitäit tunnis. Sellega täituks 8 basseinitäit 9 tunniga, ühe basseini täitmiseks kulub järelikult aega $\frac{9}{8}$ tundi.

4. *(Urve Kangro)*

Positiivse täisarvu k *faktoriaaliks* nimetatakse arvu k ja kõigi temast väiksemate positiivsete täisarvude korrutist.

Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille puhul esimese n positiivse täisarvu faktoriaalide summa on mingi täisarvu ruut.

Vastus: 1 ja 3.

Lahendus. Tähistagu $k!$ arvu k faktoriaali.

Arvutades saame $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ ja $4! = 24$. Seega

$$\begin{aligned} 1! &= 1, \\ 1! + 2! &= 3, \\ 1! + 2! + 3! &= 9, \\ 1! + 2! + 3! + 4! &= 33, \end{aligned}$$

millest tulenevalt sobivad esimese nelja positiivse täisarvu seast ülesande tingimustega $n = 1$ ja $n = 3$. Kui $k \geqslant 5$, siis esinevad $k!$ tegurite seas nii 2 kui ka 5, mistõttu $k!$ lõpeb nulliga. Seega järjestikuste positiivsete täisarvude faktoriaalide liitmisel summa viimane number alates liidetavast $5!$ enam ei muutu. Järelikult esimese 5 või enama positiivse täisarvu faktoriaalide summa viimane number on 3. Täisarvude ruudud aga saavad lõppeda vaid numbritega $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Seega rohkem sobivaid positiivseid täisarve n ei leidu.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Laos on ainult suhkrupakid massiga 1 kg, 2 kg ja 5 kg. Nendes pakkides on kokku 2024 kg suhkrut. On teada, et pakkides massiga 5 kg on kokku samapalju suhkrut kui pakkides massiga 2 kg ning massiga 1 kg pakkide arv erineb 55 võrra ülejäänud pakkide koguarvust. Mitu suhkrupakki on laos kokku?

Vastus: 1023.

Lahendus 1. Olgu z massiga 5 kg pakkide arv. Siis neis on kokku $5z$ kg suhkrut. Seega ka pakkides massiga 2 kg on kokku $5z$ kg suhkrut, nende pakkide arv on aga $2{,}5z$. Järelikult pakke massiga 5 kg ja 2 kg on kokku $z + 2{,}5z$ ehk $3{,}5z$. Pakke massiga 1 kg on siis kas $3{,}5z + 55$ või $3{,}5z - 55$ ja neis on kokku vastavalt $3{,}5z + 55$ või $3{,}5z - 55$ kilogrammi suhkrut. Esimesel juhul saame võrrandi $5z + 5z + 3{,}5z + 55 = 2024$ ehk $13{,}5z = 1969$, millel täisarvuline lahend puudub. Teisel juhul saame võrrandi $5z + 5z + 3{,}5z - 55 = 2024$ ehk $13{,}5z = 2079$, kust $z = 154$. Suhkrupakkide koguarv laos on siis $(1 + 2{,}5 + 3{,}5) \cdot 154 - 55$ ehk 1023.

Lahendus 2. Olgu y massiga 2 kg pakkide arv. Siis neis on kokku $2y$ kg suhkrut. Seega ka pakkides massiga 5 kg on kokku $2y$ kg suhkrut, nende pakkide arv on aga $0{,}4y$. Järelikult pakke massiga 2 kg ja 5 kg on kokku $y + 0{,}4y$ ehk $1{,}4y$. Pakke massiga 1 kg on siis kas $1{,}4y + 55$ või $1{,}4y - 55$ ja neis on kokku vastavalt $1{,}4y + 55$ või $1{,}4y - 55$ kilogrammi suhkrut. Esimesel juhul saame võrrandi $2y + 2y + 1{,}4y + 55 = 2024$ ehk $5{,}4y = 1969$, millel täisarvuline lahend puudub. Teisel juhul saame võrrandi $2y + 2y + 1{,}4y - 55 = 2024$ ehk $5{,}4y = 2079$, kust $y = 385$. Kõigi suhkrupakkide koguarv laos on siis $(1 + 0{,}4 + 1{,}4) \cdot 385 - 55$ ehk 1023.

Lahendus 3. Olgu x massiga 1 kg pakkide arv. Siis neis on kokku x kg suhkrut. Seega pakkides massiga 2 kg ja 5 kg on kokku $2024 - x$ kilogrammi suhkrut. Järelikult nii pakkides massiga 2 kg kui ka pakkides massiga 5 kg on kokku $\dfrac{2024 - x}{2}$ kilogrammi suhkrut. Sellest tulenevalt on massiga 2 kg ja 5 kg pakkide arv vastavalt $\dfrac{2024 - x}{4}$ ja $\dfrac{2024 - x}{10}$ ning kokku on neid pakke $\dfrac{5(2024 - x) + 2(2024 - x)}{20}$ ehk $\dfrac{7(2024 - x)}{20}$.

Ülesande tingimuse järgi $\frac{7(2024-x)}{20} = x - 55$ või $\frac{7(2024-x)}{20} = x + 55$. Esimene võrrand lihtsustub kujule $27x = 15268$, mille lahend pole täisarv. Teine võrrand lihtsustub kujule $27x = 13068$, kust $x = 484$. Seega suhkrupakkide arv laos on $484 + \frac{7(2024-484)}{20}$ ehk 1023.

Lahendus 4. Olgu massiga 1 kg, 2 kg ja 5 kg pakkide arv vastavalt x, y ja z. Ülesande tingimuste põhjal $x+2y+5z = 2024$ ja $2y = 5z$ ning $x = y+z+55$ või $x = y+z-55$. Viimased kaks võrdust saab ümber kirjutada vastavalt kujul $y+z-x = -55$ ja $y+z-x = 55$. Seega on vaja lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 2024, \\ 2y = 5z, \\ y + z - x = \pm 55 \end{cases}$$

nii pluss- kui miinusmärgiga juhul kolmandas võrrandis.

Liites esimese ja kolmanda võrrandi vastavad pooled miinusmärgiga juhul, saame $3y+6z = 1969$. Selle võrduse vasak pool jagub 3-ga, kuid parem pool mitte. Seega see juht pole võimalik.

Liites esimese ja kolmanda võrrandi vastavad pooled plussmärgiga juhul, saame $3y + 6z = 2079$, kust $y + 2z = 693$ ehk $y = 693 - 2z$. Asendades siit teise võrrandisse, saame $2(693 - 2z) = 5z$ ehk $9z = 1386$, kust $z = 154$. Seega $y = 693 - 2 \cdot 154 = 385$ ja $x = 385 + 154 - 55 = 484$ ning $x + y + z = 484 + 385 + 154 = 1023$.

2. *(Maksim Ivanov)*

Iga varblane sööb 6 minutiga $\frac{1}{15}$ tervest mannapakist ning iga tuvi 3 minutiga $\frac{1}{9}$ tervest mannapakist. Mitme sekundiga söövad 20 varblast ja 24 tuvi koos terve paki mannat?

Vastus: 54.

Lahendus. Kuna varblane sööb 6 minutiga $\frac{1}{15}$ pakki ja tuvi 3 minutiga $\frac{1}{9}$ pakki mannat, siis 1 minutiga sööb varblane $\frac{1}{15 \cdot 6}$ ehk $\frac{1}{90}$ pakki ja tuvi $\frac{1}{9 \cdot 3}$ ehk $\frac{1}{27}$ pakki mannat. Seega 20 varblast sööb 1 minutiga $\frac{20}{90}$ ehk $\frac{2}{9}$ pakki ja 24 tuvi sama ajaga $\frac{24}{27}$ ehk $\frac{8}{9}$ pakki mannat. Koos söövad 20 varblast ja 24 tuvi 1 minutiga $\frac{2}{9} + \frac{8}{9}$ ehk $\frac{10}{9}$ pakki mannat. Seega 1 sekundiga söövad 20 varblast ja 24 tuvi koos $\frac{10}{9 \cdot 60}$ ehk $\frac{1}{54}$ pakki mannat. Terve paki söömiseks kulub neil järelikult 54 sekundit.

3. *(Härmel Nestra)*

Kumb arvudest $3 \cdot 7^{98} \cdot 17^{200}$ ja $2^{296} \cdot 253^{100}$ on suurem?

Vastus: teine.

Lahendus 1. Näitame, et $3 \cdot 7^{98} \cdot 17^{200} < 2^{296} \cdot 253^{100}$. Märkame, et see võrratus järeldub kahest eraldi võrratusest

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^4 &< 7^2, \\ 7^{100} \cdot 17^{200} &< 2^{300} \cdot 253^{100}, \end{aligned}$$

kui korrutada nende vastavad pooled ja taandada ühiste teguritega. Seega piisab tõestada need kaks võrratust. Esimene võrratus kehtib, sest $3 \cdot 2^4 = 48$ ja $7^2 = 49$. Teine võrratus on samaväärne võrratusega

$$\left(7 \cdot 17^2\right)^{100} < \left(2^3 \cdot 253\right)^{100}.$$

Kuna $7 \cdot 17^2 = 2023$ ja $2^3 \cdot 253 = 2024$, siis võrratus omandab kuju $2023^{100} < 2024^{100}$, mis samuti kehtib.

Lahendus 2. Näitame, et $3 \cdot 7^{98} \cdot 17^{200} < 2^{296} \cdot 253^{100}$. Märkame, et see võrratus järeldub kahest eraldi võrratusest

$$\begin{aligned} 7^{98} \cdot 17^{196} &< 2^{294} \cdot 253^{98}, \\ 3 \cdot 17^4 &< 2^2 \cdot 253^2, \end{aligned}$$

kui korrutada nende vastavad pooled. Seega piisab tõestada need kaks võrratust. Esimene võrratus on samaväärne võrratusega

$$\left(7 \cdot 17^2\right)^{98} < \left(2^3 \cdot 253\right)^{98}.$$

Kuna $7 \cdot 17^2 = 2023$ ja $2^3 \cdot 253 = 2024$, siis võrratus omandab kuju $2023^{98} < 2024^{98}$, mis kehtib. Ka teine võrratus kehtib, sest $3 \cdot 17^4 = 250563$ ja $2^2 \cdot 253^2 = 256036$.

Märkus. Arvuti abil on võimalik veenduda, et $3 \cdot 7^{98} \cdot 17^{200} \approx 2{,}4 \cdot 10^{329}$ ja $2^{296} \cdot 253^{100} \approx 2{,}6 \cdot 10^{329}$.

4. *(Aleksei Ganyukov)*

Positiivset täisarvu n nimetame *eriliseks*, kui arv 2024 on esitatav summana kahest või enamast erinevast täisarvust, mis kõik sisalduvad arvus n. Näiteks arv 1996 on eriline, sest $2024 = 1996 + 19 + 9$.

Leia vähim eriline arv.

Märkus. Arv ei saa alata nulliga, mistõttu näiteks arvus 2006 olevad numbrite järjendid 006 ja 06 ei tule arvuna arvesse. Samuti ei tohi numbreid vahele jätta (näiteks 2006 ei sisalda arvu 206).

Lahendus. Vaatleme arvu $m = \overline{abcd}$, mille kõik numbrid on nullist erinevad ja erinevad ka omavahel. Siis suurim arvus m sisalduvate erinevate liidetavate summa on $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{bcd} + \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + a + b + c + d$ ehk $1111a + 222b + 33c + 4d$. Seega kui arv m on eriline, siis kehtib võrratus $1111a + 222b + 33c + d \geqslant 2024$.

Ülesande lahendamiseks leiame võrratuse $1111a + 222b + 33c + 4d \geqslant 2024$ vähima lahendi $\overline{abcd}$. Vähim võimalik tuhandeliste number on ilmselt 1. Võttes $a = 1$, taandub lahendatav võrratus kujule $222b + 33c + 4d \geqslant 913$. Kuna $33c + 4d \leqslant 33 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 333$, siis $222b \geqslant 913 - 333 = 580$. Järelikult $b \geqslant 3$. Vaatleme juhtu $b = 3$; lahendatav võrratus on nüüd ümber kirjutatav kujul $33c + 4d \geqslant 247$. Kuna $4d \leqslant 4 \cdot 9 = 36$, siis $33c \geqslant 247 - 36 = 211$. Järelikult $c \geqslant 7$. Võtame $c = 7$; nüüd taandub lahendatav võrratus kujule $4d \geqslant 16$, mille vähim lahend on $d = 4$.

Seega $\overline{abcd} = 1374$ on vähim arv, mille puhul $1111a+222b+33c+d \geqslant 2024$, kusjuures arvu 1374 puhul kehtib see võrratus võrdusena. Kuna arvus 1374 sisalduvad lahenduse esimeses lõigus vaadeldavad liidetavad on kõik korrektsed arvud ja omavahel erinevad, siis 1374 on eriline. Järelikult 1374 on vähim eriline arv.

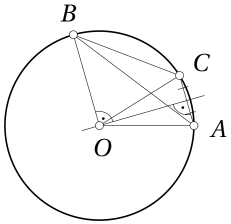
Märkus. Lahenduse korrektsuseks on oluline, et lahendataks just võrratust $1111a + 222b + 33c + d \geqslant 2024$, mitte võrdust. Lahendades võrdust $1111a + 222b + 33c + d = 2024$, jõuaksime küll samamoodi õige lahendini, aga põhjendatud oleks vaid minimaalsus nende eriliste arvude seas, mille puhul summa 2024 kasutab ära kõik esimeses lõigus vaadeldud liidetavad. Jääks teoreetiline võimalus, et leidub väiksemaid arve, mille puhul mõnede esimese lõigu liidetavate väljajätmisel tekib ometi summa 2024. Selle võimaluse välistamine pole triviaalne, sest arvu $\overline{abcd}$ vähenemisel võib summa $1111a+222b+33c+4d$ suureneda (nii on näiteks arvudega 1410 ja 1409, mis annavad vastavalt summa 2032 ja 2035).

5. *(Härmel Nestra)*

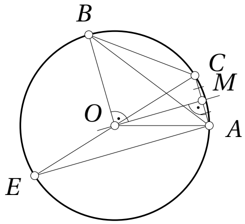
Ringjoonel keskpunktiga O valitakse mingid punktid A ja B. Olgu C punkti A peegeldus raadiusega OB ristuvast sirgest, mis läbib punkti O. On teada, et $\angle OAB = 37^\circ$. Leia nurga OCB suurus.

Vastus: 53°.

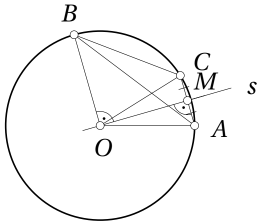
Lahendus 1. Kuna $\angle OAB = 37^\circ$ ja $|OA| = |OB|$, siis ka $\angle OBA = 37^\circ$ (joonis 8). Teisalt, kuna C on punkti A peegeldus raadiusega OB ristuvast sirgest, siis sirge AC on selle raadiusega ristuva sirgega risti ja sirgega OB paralleelne. Seega $\angle BAC = \angle OBA = 37^\circ$. Sümmeetria põhjal aga asub punkt C antud ringjoonel. Seega kesk- ja piirdenurga vahelise seose põhjal $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 74^\circ$. Kuna $|OB| = |OC|$, siis $\angle OCB = \angle OBC = \dfrac{180^\circ - \angle BOC}{2} = 53^\circ$.



Joonis 8



Joonis 9



Joonis 10

Lahendus 2. Kuna $\angle OAB = 37^\circ$ ja $|OA| = |OB|$, siis ka $\angle OBA = 37^\circ$. Sümmeetria põhjal asub punkt C antud ringjoonel; olgu E punktist C tõmmatud diameetri teine otspunkt (joonis 9). Siis piirdenurkade omadust kasutades saame

$$\angle OCB = \angle ECB = \angle EAB = 37^\circ + \angle EAO.$$

Olgu M lõigu AC keskpunkt; konstruktsiooni põhjal $OM \perp AC$. Thalese teoreemi põhjal $AE \perp AC$, mistõttu $AE \parallel OM$. Seega

$$\angle EAO = \angle AOM = \angle AOB - \angle MOB = \left(180^\circ - 2 \cdot 37^\circ\right) - 90^\circ = 90^\circ - 2 \cdot 37^\circ.$$

Kokkuvõttes $\angle OCB = 37^\circ + \left(90^\circ - 2 \cdot 37^\circ\right) = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$.

Lahendus 3. Olgu s raadiusega OB ristuv sirge, mis läbib punkti O (joonis 10). Vastavalt ülesande tekstile on punkt C punkti A peegeldus sirgest s. Olgu M lõigu AC ja sirge s lõikepunkt. Sümmeetria põhjal $|OA| = |OC|$ ja $\angle AOM = \angle COM$. Et punkt M asub sirgel, mis läbib punkti O ja on lõiguga OB risti, siis $\angle BOM = 90^\circ$.

Kuna A ja B asuvad ringjoonel keskpunktiga O, siis $|OA| = |OB|$. Seega kolmnurk AOB on võrdhaarne ehk $\angle OAB = \angle OBA = 37^\circ$. Et kolmnurga sisenurkade summa on 180°, siis

$$\angle AOB = 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA = 180^\circ - 37^\circ - 37^\circ = 106^\circ.$$

Järelikult $\angle AOM = \angle AOB - \angle BOM = 106^\circ - 90^\circ = 16^\circ$ ning seega ka $\angle COM = 16^\circ$. Siit saame $\angle COB = \angle BOM - \angle COM = 90^\circ - 16^\circ = 74^\circ$. Et $|OA| = |OB|$ ja $|OA| = |OC|$, siis $|OB| = |OC|$, kolmnurga COB võrdhaarsuse tõttu aga $\angle OCB = \angle OBC$. Kuna kolmnurga sisenurkade summa on 180°, siis $\angle OCB = \angle OBC = \dfrac{180^\circ - 74^\circ}{2} = 53^\circ$.

6. *(Oleg Košik)*

Tunni- ja minutiosutiga seinakell näitab korrektset kellaaega. Väike Juku väidab, et kui peegeldada tunniosuti numbrilaua keskpunkti läbiva horisontaalsirge suhtes ja minutiosuti numbrilaua keskpunkti läbiva vertikaalsirge suhtes, siis ei näitaks kell korrektset kellaaega. Tema kaksikvend Juhan aga ütleb, et kui peegeldada tunniosuti numbrilaua keskpunkti läbiva vertikaalsirge suhtes ja minutiosuti numbrilaua keskpunkti läbiva horisontaalsirge suhtes, siis oleks kella näit korrektne küll. Kas kellelgi poistest võib olla õigus? Kui jah, siis mis kellaaega võib kell parajasti näidata?

Märkus. Kella näit on *korrektne*, kui see on võimalik õigesti töötaval kellal (see ei pea väljendama parajasti õiget aega).

Vastus: kummalgi poisil pole õigus.

Lahendus. Olgu tunniosuti enne peegeldamist möödunud eelmise täistunni asendist nurga α võrra.

Kui peegeldada tunniosuti numbrilaua keskpunkti läbiva horisontaalsirge suhtes, siis satub ta asendisse, kust jääb liikuda nurga α võrra järgmise täistunni asendini. Kuna algne kella näit on korrektne, siis minutiosuti on enne peegeldamist möödunud täistunni asendist nurga 12α võrra. Kui peegeldada minutiosuti numbrilaua keskpunkti läbiva vertikaalsirge suhtes, siis satub ta asendisse, kust jääb liikuda nurga 12α võrra täistunni asendini. Seega tekib korrektne näit ning Juku väide ei pea paika.

Kui peegeldada tunniosuti numbrilaua keskpunkti läbiva vertikaalsirge suhtes, siis satub ta jällegi asendisse, kust jääb liikuda nurga α võrra järgmise täistunni asendini. Edasi vaatleme kahte juhtu.

- Kui eelmisest täistunnist on möödunud vähem kui pool tundi, siis tunniosutil jääb peale peegeldamist vähem kui pool tundi järgmise tunnini. Minutiosutil aga jääb ka peale peegeldamist numbrilaua keskpunkti läbiva horisontaalsirge suhtes vähemalt pool tundi järgmise tunnini.
- Kui eelmisest täistunnist on möödunud vähemalt pool tundi, siis tunniosutil jääb peale peegeldamist vähemalt pool tundi järgmise tunnini. Minutiosutil aga jääb peale peegeldamist numbrilaua keskpunkti läbiva horisontaalsirge suhtes vähem kui pool tundi järgmise täistunnini.

Seega tekkiv näit ei ole korrektne kellaaeg ja ka Juhanil ei ole õigus.

Lahendused

1. *(Härmel Nestra)*

Uue kolmeköitelise krimipõneviku „Surnud mehe laip“ teises köites on 100 lehekülge rohkem kui esimeses. Kolmanda köite 1 eksemplar ja teise köite 3 eksemplari sisaldavad kokku samapalju lehekülgi kui teise köite 1 eksemplar ja esimese köite 5 eksemplari. Peale selle on teada, et ühes köites on samapalju lehekülgi kui kahes ülejäänud köites kokku. Leia kõik võimalused, mitu lehekülge võivad sisaldada kõik kolm köidet kokku.

Vastus: 400, 1400.

Lahendus 1. Olgu esimeses köites x lehekülge. Siis teises köites on $x + 100$ lehekülge. Teise köite 1 eksemplar ja esimese köite 5 eksemplari sisaldavad kokku $(x + 100) + 5x$ ehk $6x + 100$ lehekülge. Ülesande tingimuse järgi sisaldab kolmanda köite 1 eksemplar koos teise köite 3 eksemplariga samuti $6x + 100$ lehekülge. Seega kolmas köide sisaldab $(6x + 100) - 3(x + 100)$ ehk $3x - 200$ lehekülge. Kokku on triloogias $x + (x + 100) + (3x - 200)$ ehk $5x - 100$ lehekülge.

Kuna esimeses köites on vähem lehekülgi kui teises, siis esimeses ei saa olla samapalju lehekülgi kui kahes ülejäänus kokku. Kui teises köites on samapalju lehekülgi kui esimeses ja kolmandas, siis $x + 100 = x + (3x - 200)$, kust $x = 100$. Triloogia lehekülgede koguarv on siis $5 \cdot 100 - 100$ ehk 400. Kui kolmandas köites on samapalju lehekülgi kui esimeses ja teises, siis $3x - 200 = x + (x + 100)$, kust $x = 300$. Triloogia lehekülgede koguarv on siis $5 \cdot 300 - 100$ ehk 1400.

Lahendus 2. Olgu teises köites y lehekülge. Siis esimeses köites on $y - 100$ lehekülge. Teise köite 1 eksemplar ja esimese köite 5 eksemplari sisaldavad kokku $y + 5(y - 100)$ ehk $6y - 500$ lehekülge. Ülesande tingimuse järgi sisaldab kolmanda köite 1 eksemplar koos teise köite 3 eksemplariga samuti $6y - 500$ lehekülge. Seega kolmas köide sisaldab $(6y - 500) - 3y$ ehk $3y - 500$ lehekülge. Kokku on triloogias $(y - 100) + y + (3y - 500)$ ehk $5y - 600$ lehekülge.

Kuna esimeses köites on vähem lehekülgi kui teises, siis esimeses ei saa olla samapalju lehekülgi kui kahes ülejäänus kokku. Kui teises köites on samapalju lehekülgi kui esimeses ja kolmandas, siis $y = (y - 100) + (3y - 500)$, kust $y = 200$. Triloogia lehekülgede koguarv on siis $5 \cdot 200 - 600$ ehk 400.

Kui kolmandas köites on samapalju lehekülgi kui esimeses ja teises, siis $3y - 500 = (y - 100) + y$, kust $y = 400$. Triloogia lehekülgede koguarv on siis $5 \cdot 400 - 600$ ehk 1400.

Lahendus 3. Olgu esimeses, teises ja kolmandas köites vastavalt x, y ja z lehekülge. Esimesest tingimusest saame võrrandi $x + 100 = y$, teisest aga võrrandi $z + 3y = y + 5x$. Kolmandat tingimust võib väljendada kolm erinevat võrrandit sõltuvalt sellest, millises köites on kõige rohkem lehekülgi. Et esimese tingimuse kohaselt ei saa esimene köide olla kõige mahukam, siis jääb järele kaks võimalikku võrrandit $x + z = y$ ja $x + y = z$.

Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + 100 = y, \\ z + 3y = y + 5x, \\ x + z = y \end{cases}$$

esimesest ja kolmandast võrrandist saame kokku $z = 100$. Asendades sellest ja esimesest võrrandist z ja y teise võrrandisse, mille lihtsustame eelnevalt kujule $z + 2y = 5x$, saame võrrandi $100 + 2(x + 100) = 5x$. Selle lahend on $x = 100$. Seega $y = 200$. Kolmes köites on sel juhul kokku $100 + 200 + 100$ ehk 400 lehekülge.

Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + 100 = y, \\ z + 3y = y + 5x, \\ x + y = z \end{cases}$$

teise võrrandi saab samaväärselt esitada kujul $5x - 2y = z$. Koos kolmanda võrrandiga annab see $5x-2y = x+y$. Asendades siia y esimesest võrrandist, saame $5x-2(x+100) = x+(x+100)$, kust $x = 300$. Seega $y = 400$ ja $z = 700$. Kolmes köites on aga kokku $300 + 400 + 700$ ehk 1400 lehekülge.

2. *(Härmel Nestra)*

Karbis on 8 kohukest 2 sordist, kumbagi sorti kohukesi on võrdselt. Mihkel võtab karbist juhuslikult 2 kohukest välja. Kui suur on tõenäosus, et väljavõetud kohukesed on erinevast sordist, kui iga kohuke satub väljavõetavate hulka võrdse tõenäosusega?

Vastus: $\frac{4}{7}$.

Lahendus 1. Loendame soodsad juhud. Kui välja võetakse kaks kohukest erinevatest sortidest, siis igaüks esimese sordi 4 kohukesest saab sattuda kokku igaühega teise sordi 4 kohukesest. Rohkem võimalusi pole. Seega on soodsaid juhte $4 \cdot 4$ ehk 16.

Loendame kõik juhud. Võimalusi võtta välja 2 kohukest 8 hulgast on C_8^2 ehk $\frac{8 \cdot 7}{2}$ ehk 28.

Seega otsitav tõenäosus on $\frac{16}{28}$ ehk $\frac{4}{7}$.

Lahendus 2. Loendame ebasoodsad juhud. Võimalusi võtta välja 2 kohukest esimesest sordist on C_4^2 ehk $\frac{4 \cdot 3}{2}$ ehk 6. Võimalusi võtta välja 2 kohukest teisest sordist on samamoodi 6. Seega ebasoodsaid juhte on kokku $6+6$ ehk 12.

Loendame kõik juhud. Võimalusi võtta välja 2 kohukest 8 hulgast on C_8^2 ehk $\frac{8 \cdot 7}{2}$ ehk 28.

Kokkuvõttes on soodsate juhtude arv $28-12$ ehk 16. Seega otsitav tõenäosus on $\frac{16}{28}$ ehk $\frac{4}{7}$.

Lahendus 3. Oletame üldisust kitsendamata, et Mihkel võtab karbist kohukesed ükshaaval. Sõltumata esimese kohukese valikust, on teise kohukese valikuks 7 võimalust ja seejuures 4 võimalust on valida esimesest erinevat sorti kohuke. Seega tõenäosus, et võetud kaks kohukest on erinevat sorti, on $\frac{4}{7}$.

3. *(Urve Kangro)*

Leia suurim ja vähim kümnekohaline arv, mis sisaldab kõiki numbreid ning jagub 11-ga.

Vastus: suurim 9876524130, vähim 1024375869.

Lahendus. Selleks, et arv jaguks 11-ga, peab tema paarisarvulistel ja paarituarvulistel kohtadel olevate numbrite summade vahe jaguma 11-ga. Kuna kõigi numbrite summa on 45, ei saa need summad olla võrdse paarsusega, vaid nende vahe peab olema arvu 11 paaritu kordne. Vahe ei saa olla 33, sest siis peaks väiksem summa olema 6 ja suurem summa 39, aga viie kõige väiksema numbri summa on 10. Ammugi ei saa vahe olla 55 või suurem. Seega peab vahe olema 11, mis tähendab, et need summad peavad olema 17 ja 28.

Neli kõige suuremat numbrit, millega kümnekohaline arv saab alata, on 9876. Ülejäänud paaritutel kohtadel olevate numbrite summa peaks siis olema $28-9-7$ ehk 12 ja paaris kohtadel olevate numbrite summa $17-8-6$ ehk 3. Seega paaritutel kohtadel on numbrid 3, 4, 5 ja paaris kohtadel 0, 1, 2 ning need tuleb paigutada kahanevas järjekorras.

Neli kõige väiksemat numbrit, millega kümnekohaline arv saab alata, on 1023. Nüüd peaks ülejäänud paaritutel kohtadel või paaris kohtadel olevate numbrite summa olema $17-3$ ehk 14, aga vähim kolme numbri summa järelejäänutest on $4+5+6$ ehk 15. Seega sellise algusega sobivaid kümnekohalisi arve pole. Järgmine vähim võimalik arvu algus on 1024. Sellisel juhul peab ülejäänud paaritutel kohtadel olevate numbrite summa olema $17-1-2$ ehk 14 või ülejäänud paaris kohtadel olevate numbrite summa olema $17 - 0 - 4$ ehk 13. Viimane variant ei ole võimalik, sest vähim kolme numbri summa järelejäänutest on $3 + 5 + 6$ ehk 14. Seega paaritutel kohtadel on numbrid 3, 5, 6 ja paaris kohtadel 7, 8, 9 ning need tuleb paigutada kasvavas järjekorras.

4. *(Hendrik Vija)*

Leia avaldise $\sqrt{2024 + 640\sqrt{10}} - \sqrt{1000}$ väärtus.

Vastus: 32.

Lahendus. Tähistame otsitava vastuse muutujaga a ja kirjutame antud võrduse kujul $\sqrt{2024 + 640\sqrt{10}} = a + \sqrt{1000}$. Tõstes pooled ruutu, saame $2024 + 640\sqrt{10} = a^2 + 1000 + 2a\sqrt{1000}$. See võrdus on ilmselt tõene, kui $2024 = a^2 + 1000$ ja $640\sqrt{10} = 2a\sqrt{1000}$. Mõlemat viimast võrdust rahuldab $a = 32$. Kuna $32 + \sqrt{1000} \geqslant 0$, siis rahuldab $a = 32$ ka algset võrdust $\sqrt{2024 + 640\sqrt{10}} = a + \sqrt{1000}$. Seega antud avaldise väärtus on 32.

5. *(Sandra Schumann, Aleksei Ganyukov)*

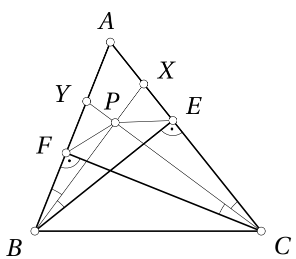
Teravnurkse kolmnurga ABC tippudest B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid on vastavalt E ja F. Nurkade EBF ja ECF poolitajad lõikuvad punktis P.

a) Leia nurga BPC suurus.

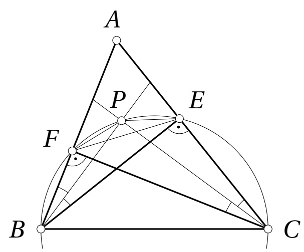
b) Tõesta, et $|PE| = |PF|$.

Lahendus 1. Tähistame $\angle CAB = \alpha$. Täisnurksetest kolmnurkadest ABE ja ACF saame vastavalt $\angle ABE = 90^\circ - \alpha$ ja $\angle ACF = 90^\circ - \alpha$.

a) Olgu X kiire BP lõikepunkt küljega AC ja Y kiire CP lõikepunkt küljega AB (joonis 11). Siis $\angle ABX = \frac{1}{2}\left(90^\circ - \alpha\right) = 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Kolmnurgast ABX saame nüüd $\angle AXB = 180^\circ - \alpha - \left(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 135^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Sarnaselt leiame $\angle AYC = 135^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Nelinurgast $AXPY$ saame nüüd



Joonis 11



Joonis 12

$\angle XPY = 360^\circ - \alpha - \left(135^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) - \left(135^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ$. Lõpuks saame tippnurkadest $\angle BPC = \angle XPY = 90^\circ$.

b) Kuna $\angle ECF = \angle EBF$, siis asuvad punktid B, C, E, F ühel ringjoonel ehk kolmnurkade EBF ja ECF ümberringjooned ühtivad. Nurga EBF poolitaja jaotab pooleks ka selle ringjoone kaare EF; sama teeb nurga ECF poolitaja. Järelikult nurkade EBF ja ECF poolitajate lõikepunkt P asub kaare EF keskpunktis. Kuna võrdsetele kaartele vastavad võrdsed kõõlud, siis $|PE| = |PF|$.

Lahendus 2.

a) Tähistame $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ ja $\angle BCA = \gamma$. Täisnurksetest kolmnurkadest ABE ja ACF saame vastavalt $\angle ABE = 90^\circ - \alpha$ ja $\angle ACF = 90^\circ - \alpha$. Seega $\angle PBC = \angle ABC - \angle ABP = \beta - \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha)$ ja $\angle PCB = \angle ACB - \angle ACP = \gamma - \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha)$, kust

$$\begin{aligned}\angle PBC + \angle PCB &= \beta - \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) + \gamma - \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = \\ &= \beta + \gamma - (90^\circ - \alpha) = \\ &= \alpha + \beta + \gamma - 90^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes $\angle BPC = 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

b) Täisnurkse kolmnurga BCE ümberringjoone keskpunkt asub hüpotenuusi keskpunktis ja raadius võrdub poole hüpotenuusi pikkusega. Ka täisnurkse kolmnurga BCF ümberringjoone keskpunkt asub hüpotenuusi keskpunktis ja raadius võrdub poole hüpotenuusi pikkusega. Kuna mõlema kolmnurga hüpotenuus on BC, on kolmnurkadel BCE ja BCF ühine ümberringjoon. Osast a) järeldub, et ka kolmnurk BCP on täisnurkne ja tema hüpotenuus on BC, millest tulenevalt on ka kolmnurgal BCP sama ümberringjoon (joonis 12). Piirdenurkade omadusest saame $\angle PEF = \angle PBF = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha)$ ja $\angle PFE = \angle PCE = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha)$. Seega $\angle PEF = \angle PFE$, millest tulenevalt $|PE| = |PF|$.

Lahendus 3. Lahendame mõlemad osad korraga. Et $\angle BFC = 90^\circ = \angle BEC$, on $BFEC$ kõõlnelinurk diameetriga BC. Järelikult $\angle FBE = \angle FCE$. Seega ka $\angle FBP = \angle FCP$, mistõttu $BFPC$ on kõõlnelinurk ehk P asub nelinurga $BFEC$ ümberringjoonel. Seega $\angle BPC = 90^\circ$. Kuna ka $\angle FBP = \angle EBP$, on kaared FP ja EP võrdsed, kust $|FP| = |EP|$.

6. *(Birgit Veldi)*

Tähti ja Arvi kirjutavad tahvlile vastavalt tähe- ja numbrijärjendeid. Tähti tahab koostada eesti tähestiku 27 tähest kõikvõimalikud 5-tähelised järjendid, milles kaks täishäälikut (a, e, i, o, u, õ, ä, ö, ü) poleks kõrvuti ja kõige viimane täht poleks täpitäht (õ, ä, ö, ü). Arvile meeldib väga number 3. Seetõttu soovib ta kirjutada Tähti järjendist 3 korda pikemaid numbrijärjendeid, kasutades vaid numbreid 1, 2 ja 3. Alati, kui Arvi järjendis on 3-ga jaguva järjekorranumbriga kohal number 3, siis eelmisel ega järgmisel 3-ga jaguva järjekorranumbriga kohal number 3 olla ei tohi. Samuti tahab Arvi, et kui tema järjend lõpeb 3-ga, siis viimase 3 numbri summa vähim algtegur poleks väiksem kui 3. Kas Arvi kirjutatavate järjendite arv on suurem, väiksem või niisama suur kui Tähti kirjutatavate järjendite arv?

Vastus: niisama suur.

Lahendus 1. Jaotame Arvi järjendid kolmest numbrist koosnevateks plokkideks. Numbritest 1, 2 ja 3 saab kokku moodustada 27 erinevat kolmest järjendit. Näitame, et iga sellise ploki saab vastavusse panna ühe tähega nii, et Tähti ja Arvi kirjutatavatele järjenditele kehtivad samad tingimused. Kolmest numbrist koosnevaid plokke, mis lõpevad 3-ga, on 9; seame need vastavusse täishäälikutega, mida on samuti 9. Kuna kaks täishääikut pole kõrvuti parajasti siis, kui kahe järjestikuse ploki viimane number pole 3, siis on sellekohased ülesande tingimused üksteisega vastavuses. Tingimus, et viimase kolme numbri summa vähim algtegur pole väiksem kui 3, on samaväärne tingimusega, et viimase 3 numbri summa on paaritu. Selliseid 3-ga lõppevaid plokke on täpselt 5: 113, 133, 223, 313, 333. Need seame vastavusse tähtedega a, e, i, o, u. Nii saame vastavuse ka tingimusele, et viimane täht Tähti järjendis ei tohi olla täpitäht.

Nii tekib Tähti ja Arvi tingimustele vastavate järjendite vahel üksühene vastavus. Seega kirjutavad mõlemad ühepalju järjendeid.

Lahendus 2. Arvutame välja Tähti ja Arvi tehtud järjendite arvud ja võrdleme neid.

Tähti järjendid. Tähistagu k kaashäälikut, t täishäälikut ja t' täishäälikut, mis ei tohi olla täpitäht. Vaatame võimalusi nende paigutamiseks Tähti järjenditesse.

- Kui pole ühtegi täishäälikut, on ainus variant $kkkkk$ ja kuna iga kaashääliku jaoks on $27 - 9$ ehk 18 võimalust, annab see 18^5 võimalust.
- Ühe täishäälikuga variandid on $tkkkk$, $ktkkk$, $kktkk$, $kkktk$, $kkkkt'$. Siit saame kokku $4 \cdot 18^4 \cdot 9 + 18^4 \cdot 5$ võimalust.
- Kahe täishäälikuga variandid on $tktkk$, $tkktk$, $tkkkt'$, $ktktk$, $ktkkt'$, $kktkt'$, mis annavad kokku $3 \cdot 18^3 \cdot 9 \cdot (9+5)$ võimalust.
- Kui on kolm täishäälikut, on ainus variant $tktkt'$, mis annab $18^2 \cdot 9^2 \cdot 5$ võimalust.

Rohkem täishäälikuid ei saa olla, sest muidu oleks mõned neist kõrvuti. Seega Tähti järjendeid kokku on

$$\begin{aligned} T &= 18^5 + 4 \cdot 18^4 \cdot 9 + 18^4 \cdot 5 + 3 \cdot 18^3 \cdot 9 \cdot (9+5) + 18^2 \cdot 9^2 \cdot 5 = \\ &= 3^8 \cdot 2^2 \cdot \left(3^2 \cdot 2^3 + 3^2 \cdot 2^4 + 2^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 14 + 5\right) = 3^8 \cdot 2^2 \cdot 325. \end{aligned}$$

Arvi järjendid. Paneme tähele, et 1., 2., 4., 5., 7., 8., 10. ja 11. numbrile piiranguid pole, seega on nende valikuks 3^8 võimalust.

Kui viimane number on 3, siis viimased 3 numbrit võivad olla 113, 223, 333, 133 või 313. Seda on 5 võimalust. Kui viimane number ei ole 3, on viimase 3 numbri valikuks $3 \cdot 3 \cdot 2$ ehk 18 võimalust.

Vaatame nüüd 3., 6., 9., 12., 13., 14. ja 15. numbri võimalusi. Tähistagu t numbrit 3, k numbrit 1 või 2 ning t' kolme viimast numbrit, mis lõppevad 3-ga ja k' kolme viimast numbrit, mis 3-ga ei lõppe. Siis saame samad võimalused nagu Tähtil, ainult et kui Tähti võimalus lõppeb k-ga, siis Arvil k'-ga.

- Variant $kkkkk'$ annab $2^4 \cdot 18$ võimalust.
- Kombinatsioonid $tkkkk'$, $ktkkk'$, $kktkk'$, $kkktk'$, $kkkkt'$ annavad $4 \cdot 2^3 \cdot 18 + 2^4 \cdot 5$ võimalust.
- Kombinatsioonid $tktkk'$, $tkktk'$, $tkkkt'$, $ktktk'$, $ktkkt'$, $kktkt'$ annavad $3 \cdot 2^2 \cdot 18 + 3 \cdot 2^3 \cdot 5$ võimalust.
- Variant $tktkt'$ annab $4 \cdot 5$ võimalust.

Nüüd liidame kõik kokku.

$$\begin{aligned} A &= 3^8 \cdot \left(2^4 \cdot 18 + 4 \cdot 2^3 \cdot 18 + 2^4 \cdot 5 + 3 \cdot 2^2 \cdot 18 + 3 \cdot 2^3 \cdot 5 + 4 \cdot 5\right) = \\ &= 3^8 \cdot 2^2 \cdot \left(2^2 \cdot 18 + 2^3 \cdot 18 + 2^2 \cdot 5 + 3 \cdot 18 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 5\right) = 3^8 \cdot 2^2 \cdot 325. \end{aligned}$$

Saime, et Tähti ja Arvi saavad ühepalju järjendeid moodustada.

Lahendused

1. *(Hendrik Vija)*

Leia kõik reaalarvud k, mille korral võrrandil

$$(k+1)x^2 + 90kx + k^2 = 0$$

leidub täpselt üks reaalarvuline lahend x.

Vastus: $-1, 0, 2024$.

Lahendus. Kui $k+1=0$ ehk $k=-1$, on tegemist lineaarvõrrandiga $-90x+1=0$, millel ilmselgelt leidub täpselt üks lahend. Ülejäänud juhtudel on tegemist ruutvõrrandiga, millel leidub täpselt üks lahend parajasti siis, kui diskriminant on võrdne nulliga ehk $(90k)^2 - 4(k+1)k^2 = 0$. Pärast tegurdamist vasakus pooles omandab see tingimus kuju $4k^2(45^2-(k+1)) = 0$. Siit kas $k=0$ või $k+1=45^2$; viimasest võrdusest saame $k = 45^2 - 1 = 2024$.

2. *(Jaan Kristjan Kaasik)*

Mängur veeretab korraga 3 ühesugust täringut. Igal täringul saab tulemuseks olla 1, 2, 3, 4, 5 või 6 silma. Mitu erinevat tulemust (silmade arvude kolmikut) võib mängur saada? Tulemused, mis erinevad täringute järjekorra poolest, loetakse samaks.

Vastus: 56.

Lahendus 1. Võimalusi, kus kõigil täringutel on sama silmade arv, on samapalju nagu iga täringu visketulemusi ehk 6.

Järgmisena loendame võimalusi, kus silmade arv on kahel täringul sama ja ühel neist erinev. Kahe täringu ühise silmade arvu valikuks on 6 võimalust ning sõltumata sellest valikust on kolmanda täringu silmade arvu valikuks 5 võimalust. Seega niisuguseid võimalusi on kokku $6 \cdot 5$ ehk 30.

Lõpuks loendame võimalusi, kus kõigil täringutel on erinev silmade arv. Neid on samapalju kui kombinatsioone 6 elemendist 3-kaupa ehk C_6^3. Seega niisuguseid võimalusi on $\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}$ ehk 20.

Kõiki võimalusi kokku on järelikult $6+30+20$ ehk 56.

Lahendus 2. Võtame lisaks kasutusele 5 libatäringut, millel silmi märgitud ei ole. Tavaliste täringute viske järel asetame kõik libatäringud ühte ritta ning iga tavalise täringu samma ritta vastavalt silmade arvule: ühed lähevad kõige ette, kahed esimese ja teise libatäringu vahele, kolmed teise ja kolmanda libatäringu vahele jne kuni kuued kõige lõppu. Lõpuks märgime üles, millistel positsioonidel on saadud reas libatäringud. See positsioonide hulk on 5-kaupa kombinatsioon arvudest $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Paneme tähele, et see kombinatsioon määrab täringute visketulemuse üheselt ning iga 5-kaupa kombinatsioon arvudest $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ on mingist täringute visketulemusest võimalik saada. Seega on täringute visketulemusi samapalju nagu kombinatsioone 8 elemendist 5-kaupa ehk C_8^5 ehk 56.

Märkus. Lahendusega 2 sarnaselt on lihtne näidata, et n täringu korral on erinevate tulemuste arv C_{n+5}^5. Kui täring oleks k-tahuline, siis oleks võimalusi C_{n+k-1}^{k-1}.

3. *(Martin Rahe)*

Artur kirjutab tahvlile kõik naturaalarvud 1 kuni 2023. Seejärel on tal võimalik teha kahte tüüpi käike. Esimest tüüpi käigu korral valib ta tahvlilt suvalised arvud x ja y, kustutab need ning kirjutab tahvlile arvu $x^5 + y$. Teist tüüpi käigu korral valib ta tahvlilt suvalised arvud x ja y, kustutab need ning kirjutab tahvlile arvud $32x + 7y^2 + 2y$ ja $59y - 7y^2 - x$. Kas Arturil on võimalik esimest ja teist tüüpi käike vabalt valitud järjestuses kasutades saavutada olukord, kus ainsana on tahvlile jäänud mingi positiivne arv, mille viimased neli numbrit on 2024?

Vastus: ei.

Lahendus. Iga naturaalarvu viies aste lõpeb sama numbriga nagu arv ise. Sellest nähtub, et iga täisarvu viies aste annab 10-ga jagamisel sama jäägi nagu arv ise. Seega esimest tüüpi käigu puhul jääb tahvlil olevate arvude summa jääk 10-ga jagamisel samaks. Teist tüüpi käigu puhul on tekkinud uute arvude summa $31x + 61y$. Kuna 10-ga jagamisel annab $31x$ sama jäägi nagu x ja $61y$ sama jäägi nagu y, siis jääb ka teist tüüpi käigu puhul tahvlil olevate arvude summa jääk 10-ga jagamisel samaks.

Positiivne arv, mille viimased neli numbrit on 2024, annab 10-ga jagamisel jäägi 4. Arvude 1 kuni 2023 summa on aga $\frac{2023 \cdot 2024}{2}$ ehk $2023 \cdot 1012$, mille jääk 10-ga jagamisel on 6. Seega ei ole Arturil võimalik saavutada soovitud lõppseisu.

Märkus. Arvu jääk 10-ga jagamisel langeb kokku tema viimase numbriga, kui tegemist on naturaalarvuga. Kuna ülesandes kirjeldatud protsessis võivad tahvlile tekkida ka negatiivsed arvud ja negatiivseks võib saada ka nende arvude summa, siis pole korrektne rääkida summa viimase numbri, vaid just summa 10-ga jagamisel tekkiva jäägi säilimisest.

4. *(Hendrik Vija)*

Juku teostas õigesti murdude liitmistehte $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, kusjuures arvud a, b, c, d, e, f on kõik positiivsed. Kas on võimalik, et tehe jääb õigeks ka siis, kui igas murrus lugeja ja nimetaja ära vahetada (st kas on võimalik, et ka võrdus $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$ on tõene)?

Vastus: ei.

Lahendus 1. Paneme tähele, et $\frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ ja $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc+ad}{ac}$. Seega tuleb välja selgitada, kas on võimalik, et $\frac{bc+ad}{ac} = \frac{f}{e}$. Eelneva põhjal $\frac{f}{e} = \frac{bd}{ad+bc}$. Niisiis taandub küsimus sellele, kas saab kehtida võrdus $\frac{bc+ad}{ac} = \frac{bd}{ad+bc}$. Võrde omaduse põhjal on viimane võrdus samaväärne võrdusega $abcd = (ad+bc)^2$. Kuna aga

$$(ad+bc)^2 - abcd = (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 - abcd = (ad)^2 + (bc)^2 + abcd > 0,$$

siis see võrdus kehtida ei saa. Järelikult ei ole võimalik, et kõigi murdude pööramisel tekib tõene võrdus.

Lahendus 2. Näitame, et kui võrdus $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ on tõene, siis võrdus $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$ tõene olla ei saa. Oletame väitevastaselt, et mõlemad võrdused kehtivad. Korrutades nende võrduste vastavad pooled, on paremal pool tulemuseks 1 ning vasak pool lihtsustub kujule $2 + \frac{ad}{bc} + \frac{bc}{ad}$. Viimane summa on ilmselt suurem kui 1, oleme saanud vastuolu.

Lahendus 3. Tähistame $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, $z = \frac{e}{f}$. Siis $z = x + y$ ja, eeldusel et tehe jääb õigeks lugejate ja nimetajate vahetamisel, ka $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$. Viimasest järeldub $z = \frac{xy}{x+y}$. Kokkuvõttes $x+y = \frac{xy}{x+y}$, kust $(x+y)^2 = xy$. Sulgude avamisel ja sarnaste liikmete koondamisel saame $x^2 + y^2 + xy = 0$. Kuna kõik arvud on positiivsed, ei saa see võrdus kehtida. Järelikult ei ole võimalik, et kõigi murdude pööramisel tekib tõene võrdus.

Lahendus 4. Kuna kõik arvud on positiivsed, siis $\frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$. See aga tähendab, et $\frac{b}{a} > \frac{f}{e}$, mistõttu ka $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} > \frac{f}{e}$. Järelikult ei ole võimalik, et kõigi murdude pööramisel tekib tõene võrdus.

5. *(Härmel Nestra)*

Kolmnurgas ABC tõmmatakse mediaan AK. Kas võib kindlalt väita, et mediaani AK pikkus on väiksem kui:

a) külgede AB ja AC pikkuste aritmeetiline keskmine?

b) külgede AB ja AC pikkuste geomeetriline keskmine?

Vastus: a) jah; b) ei.

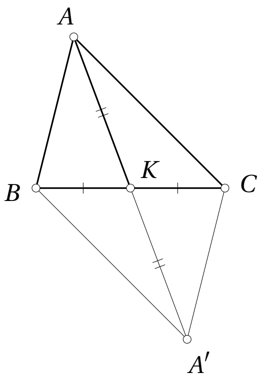
Lahendus 1.

a) Olgu A' punkti A peegeldus punktist K (joonis 13). Et K poolitab nii lõigu BC kui ka lõigu AA', siis $ABA'C$ on rööpkülik, millest tulenevalt $|A'C| = |AB|$. Kolmnurgavõrratuse põhjal $|AC|+|A'C| > |AA'|$. Järelikult

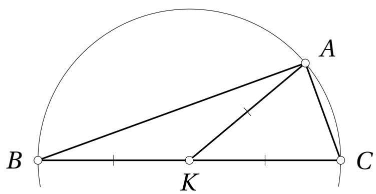
$$|AK| = \frac{|AA'|}{2} < \frac{|AC| + |A'C|}{2} = \frac{|AC| + |AB|}{2}$$

ehk AK pikkus on väiksem kui AB ja AC pikkuste aritmeetiline keskmine. Seega antud väide kehtib igas kolmnurgas.

b) Näitame, et antud väide kõigis kolmnurkades ei kehti. Piisab näidata, et see väide ei kehti kõigis täisnurksetes kolmnurkades täisnurgaga tipu A juures. Fikseerides tipud B ja C, saab A olla suvaline tippudest B ja C erinev punkt ringjoonel diameetriga BC; sõltumata punkti A asukohast, on mediaani AK pikkus võrdne selle ringjoone raadiusega (joonis 14). Külgede AB ja AC pikkuste geomeetriline keskmine $\sqrt{|AB| \cdot |AC|}$ aga võrdub ruutjuurega kolmnurga ABC kahekordsest pindalast. Liigutades tippu A kuitahes lähedale tipule B või C, läheneb kolmnurga ABC pindala ja ühtlasi ka ruutjuur tema kahekordsest nullile, mistõttu külgede AB ja AC geomeetriline keskmine saab väiksemaks mediaani AK pikkusest. Järelikult ülesande väide igas kolmnurgas ei kehti.



Joonis 13



Joonis 14

Lahendus 2. Tähistame $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ ja $m = |AK|$. Mediaani pikkuse valemi põhjal $m = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$.

a) Valemit kasutades saame

$$\begin{aligned}
m < \frac{b+c}{2} &\iff \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2} < \frac{b+c}{2} \iff \\
&\iff \sqrt{2b^2+2c^2-a^2} < b + c \iff \\
&\iff 2b^2 + 2c^2 - a^2 < b^2 + 2bc + c^2 \iff \\
&\iff b^2 + c^2 - a^2 < 2bc \iff b^2 - 2bc - c^2 < a^2 \iff \\
&\iff (b-c)^2 < a^2 \iff |b-c| < a.
\end{aligned}$$

Viimane võrratus aga kehtib igas kolmnurgas.

b) Valemit kasutades saame

$$\begin{aligned}
m < \sqrt{bc} &\iff \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2} < \sqrt{bc} \iff \\
&\iff \sqrt{2b^2+2c^2-a^2} < 2\sqrt{bc} \iff \\
&\iff 2b^2 + 2c^2 - a^2 < 4bc \iff \\
&\iff 2b^2 - 4bc + 2c^2 < a^2 \iff \\
&\iff 2(b-c)^2 < a^2 \iff \sqrt{2}|b-c| < a.
\end{aligned}$$

Viimane võrratus ei kehti näiteks kui $a = b = 4$ ja $c = 1$, sest $3\sqrt{2} > 4$.

Märkus. Lahenduses 2 kasutatud mediaani pikkuse valem on lihtsasti tuletatav koosinusteoreemi abil. Tõepoolest, olgu $\delta = \angle AKC$; siis koosinusteoreemist kolmnurkades AKC ja AKB saame vastavalt

$$\begin{aligned}
b^2 &= m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - am\cos\delta, \\
c^2 &= m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - am\cos(180^\circ - \delta).
\end{aligned}$$

Kuna $\cos(180^\circ - \delta) = -\cos\delta$, siis nende kahe võrduse vastavate poolte liitmisel saame $b^2 + c^2 = 2m^2 + \dfrac{a^2}{2}$, kust suuruse m avaldamisel saamegi $m = \dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$.

Lahendus 3.

a) Tähistame $\vec{AC} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{c}$ ja $\vec{AK} = \vec{m}$ ning $\angle BAC = \alpha$. Siis $\vec{m} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$. Kasutades vektorite skalaarkorrutist ja -ruutu, saame

$$\begin{aligned}
|\vec{m}| &= \sqrt{\vec{m}^2} = \sqrt{\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(\vec{b}+\vec{c}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2}}{2} = \\
&= \frac{\sqrt{|\vec{b}| + |\vec{c}| + 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha}}{2}.
\end{aligned}$$

Kuna $\cos\alpha < 1$, siis $2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha < 2|\vec{b}||\vec{c}|$, millest tulenevalt

$$|\vec{m}| < \frac{\sqrt{|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{b}||\vec{c}|}}{2} = \frac{\sqrt{\left(|\vec{b}| + |\vec{c}|\right)^2}}{2} = \frac{|\vec{b}| + |\vec{c}|}{2}.$$

Seega AK pikkus on väiksem AC ja AB pikkuste aritmeetilisest keskmisest.

b) Fikseerime $|AC| = b$ ja $|AB| = c$ nii, et $b \neq c$. Tähistame $\angle BAC = \alpha$ ja vaatleme protsessi $\alpha \to 0$. Piirjuhul $\alpha = 0$ oleks AK pikkus võrdne b ja c aritmeetilise keskmisega. On teada, et erinevate positiivsete arvude aritmeetiline keskmine on geomeetrilisest keskmisest alati suurem; kuna AK pikkus muutub vaadeldavas protsessis pidevalt, saab järelikult leida küllalt väikse $\alpha > 0$, mille puhul AK pikkus on suurem AC ja AB pikkuste geomeetrilisest keskmisest. Seega küsitud väide üldjuhul ei kehti.

6. *(Härmel Nestra)*

Tasandil märgitud n sirget lõikuvad kokku k erinevas punktis $P_1, \ldots, P_k$. Tähistagu p_i punktis P_i lõikuvate märgitud sirgete arvu. Tõesta võrratus

$$p_1^2 + \ldots + p_k^2 \leqslant 2n(n-1).$$

Lahendus 1. Paneme tähele, et $p_i(p_i - 1)$ on punktis P_i lõikuvate erinevate märgitud sirgete järjestatud paaride arv. Kõigi märgitud sirgete järjestatud paaride arv on $n(n-1)$. Kuna iga kaks erinevat sirget lõikuvad ülimalt ühes punktis, siis

$$p_1(p_1 - 1) + \ldots + p_k(p_k - 1) \leqslant n(n-1). \tag{1}$$

Avades vasakul pool võrratust sulud ja viies lineaarliikmed paremale poole, saame

$$p_1^2 + \ldots + p_k^2 \leqslant n(n-1) + \left(p_1 + \ldots + p_k\right). \tag{2}$$

Paneme tähele, et $0 \leqslant p_i(p_i - 2)$, sest $p_i \geqslant 2$ (igas lõikepunktis kohtub vähemalt 2 sirget). Järelikult $p_i \leqslant p_i(p_i - 1)$, mistõttu võrratuse (1) põhjal $p_1 + \ldots + p_k \leqslant n(n-1)$. Võrratusest (2) saame nüüd

$$p_1^2 + \ldots + p_k^2 \leqslant n(n-1) + n(n-1) = 2n(n-1).$$

Märkus. Võrratust $p_1 + \ldots + p_k \leqslant n(n-1)$ võib tõestada ka loendades lõikepunktide ja sellega lõikuvate sirgete paare. Loendades paare lõikepunktide kaupa, on selliseid paare $p_1 + \ldots + p_k$. Loendades paare sirgete kaupa, on selliseid paare maksimaalselt $n(n-1)$, sest igal sirgel saab olla maksimaalselt $n-1$ lõikepunkti.

Lahendus 2. Paneme tähele, et kui kõik märgitud sirgete paarid lõikuvad erinevates punktides, siis lõikepunkte on täpselt $\frac{1}{2}n(n-1)$ ja igas punktis lõikub täpselt 2 märgitud sirget. Seega tõestatav võrratus omandab kuju $4 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) \leqslant 2n(n-1)$, mis kehtib võrdusena.

Nüüd oletame, et mingid m märgitud sirget lõikuvad ühes punktis, kus $m > 2$. Kui me nihutame üht neist sirgetest veidi, siis endist lõikepunkti jääb läbima $m-1$ märgitud sirget, juurde aga tekib $m-1$ lõikepunkti, millest igas lõikub 2 märgitud sirget. Ilmselt saab nihke teha nii, et üheski teises kohas ei tekiks juurde selliseid punkte, kus lõikub rohkem kui 2 märgitud sirget. Nihke tulemusel kaob ülesande võrratuse vasakult poolt liidetav m^2 ja lisandub summa $(m-1)^2 + 4(m-1)$. Seega suureneb ülesande võrratuse vasak pool $(m-1)^2 + 4(m-1) - m^2$ ehk $2m-3$ võrra (ja võib suureneda veel, kuna nihutatav sirge võib läbida ka mõnda teist punkti, kus lõikub rohkem kui 2 märgitud sirget).

Järelikult on ülesande võrratuse vasak pool suurim, kui kõik märgitud sirgete paarid lõikuvad erinevates punktides. Kuna sel juhul võrratus kehtib, siis kehtib see võrratus kõigil juhtudel.

Lahendus 3. Olgu meil $k \times n$ tabel, mille read vastavad lõikepunktidele $P_1, \ldots, P_k$ ja veerud vastavad sirgetele $s_1, \ldots, s_n$. Kui sirge s_j läbib lõikepunkti P_i, siis kirjutame lahtrisse (i, j) arvu p_i, vastasel juhul kirjutame lahtrisse 0. Arvutame tabeli kõigi arvude summa S kahel viisil.

Summeerides arvud ridade kaupa, paneme tähele, et reas i on p_i kirjas p_i korda, seega reas i on arvude summa p_i^2. Järelikult $S = p_1^2 + \cdots + p_k^2$. Summeerides arvud aga veergude kaupa, paneme tähele, et veerus j on kirjas p_i iga lõikepunkti P_i jaoks, mida sirge s_j läbib. Esitades väärtused p_i summana $1 + (p_i - 1)$, näeme, et veerus j loendatakse ühe korra iga lõikepunkti, mida sirge s_j läbib (vasakpoolsed liidetavad), ja ühe korra sirge s_j iga lõikumist mõne muu sirgega (parempoolsed liidetavad). Kuna iga kaks sirget lõikuvad ülimalt ühe korra, siis on lõikepunktide arv ülimalt $n-1$ ja ka lõikumiste arv mõne muu sirgega ülimalt $n-1$, seega veerus j olevate arvude summa on ülimalt $2(n-1)$. Järelikult $S \leqslant 2n(n-1)$ ning kokkuvõttes $p_1^2 + \ldots + p_k^2 \leqslant 2n(n-1)$.

Lahendus 4. Tõestame võrratuse matemaatilise induktsiooni abil. Baasjuhul $n = 1$ on võrratuse kumbki pool 0, nii et võrratus kehtib.

Eeldame nüüd, et iga n sirge konfiguratsiooni korral $p_1 + \cdots + p_k \leqslant 2n(n-1)$ kehtib. Tõestame nüüd ülesande väite $n+1$ jaoks, lisades ühe sirge s. Eeldame, et s läheb läbi ℓ_i sellise lõikepunkti, mida enne sirge s lisamist läbis i sirget (ehk nüüd läbib $i+1$ sirget). Seega s lõikub kokku $\ell_1 + 2\ell_2 + \ldots + n\ell_n$ sirgega. Kuna iga kaks sirget lõikuvad ülimalt ühe korra, siis $\ell_1 + 2\ell_2 + \ldots + n\ell_n \leqslant n$.

Vaatame nüüd, kuidas suureneb kumbki võrratuse pool. Võrratuse parem pool kasvab $2(n+1)n - 2n(n-1) = 4n$ võrra. Võrratuse vasak pool kasvab aga $\ell_1 \cdot 2^2 + \ell_2 \cdot (3^2 - 2^2) + \ell_3 \cdot (4^2 - 3^2) + \ldots + \ell_n \left((n+1)^2 - n^2\right)$ võrra. Kuna aga $2^2 = 4$ ja $(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 \leqslant 4x$, siis

$$\ell_1 \cdot 2^2 + \ell_2 \cdot (3^2 - 2^2) + \ldots + \ell_n \left((n+1)^2 - n^2\right) \leqslant 4\left(\ell_1 + 2\ell_2 + \ldots + n\ell_n\right) \leqslant 4n.$$

Järelikult parem pool kasvab vähemalt sama palju kui vasak pool, seega võrratus kehtib ka iga $n+1$ sirge konfiguratsiooni korral. Sellega on tõestatud induktsiooni samm, mistõttu võrratus kehtib iga n jaoks.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **Üldjuhend**

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud üle sannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

I osa hindamisjuhised

1.	◦ Antud õige vastus 333:	2 p
2.	◦ Antud õige vastus 12:	2 p
3.	◦ Antud õige vastus 14 eurot:	2 p
	◦ Antud vastuseks 14 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
4.	◦ Antud õige vastus 6:	2 p
5.	◦ Antud õige vastus 9:	2 p
	◦ Antud vastuseks 9 koos vale ühikuga:	1 p
6.	◦ Antud õige vastus 40°:	2 p
	◦ Antud vastuseks 40 ilma kraadimärgita:	1 p
7.	◦ Antud täielik õige vastus 23 ja 26:	2 p
	◦ Antud vastuseks kas 23 või 26 üksi või koos ühe vale arvuga või 23 ja 26 mõlemad koos ühe vale arvuga:	1 p
	◦ Antud vastuseks ainult valed arvud või üks või kaks õiget arvu koos kahe või enama vale arvuga:	0 p

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 48: 2 p
- Antud vastus taandamata murru kujul (nt $\frac{1008}{21}$): 0 p

2.
- Antud õige vastus 927: 2 p

3.
- Antud õige vastus 52: 2 p

4.
- Antud õige vastus 48: 2 p

5.
- Antud õige vastus 7: 2 p
- Antud vastuseks 7 koos vale ühikuga: 1 p

6.
- Antud õige vastus 70°: 2 p
- Antud vastuseks 70 ilma kraadimärgita: 1 p

7.
- Antud õige vastus 4: 2 p

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 6: 2 p
- Antud vastus taandamata murru kujul (nt $\frac{12}{2}$): 0 p

2.
- Antud õige vastus 18: 2 p

3.
- Antud õige vastus 1,25 (või $\frac{5}{4}$): 2 p
- Antud vastuseks $\frac{10}{8}$ või mõni muu õige väärtusega taandamata murd: 1 p

4.
- Antud õige vastus 30: 2 p

5.
- Antud õige vastus 36 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks 36 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

6.
- Antud õige vastus 15°: 2 p
- Antud vastuseks 15 ilma kraadimärgita: 1 p

7.
- Antud täielik õige vastus 9 ja 27: 2 p
- Antud vastuseks kas 9 või 27 üksi või ühe vale arvuga või 9 ja 27 mõlemad koos ühe vale arvuga: 1 p
- Antud vastuseks ainult valesid arve või üks või kaks õiget arvu koos kahe või enama vale arvuga: 0 p

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa hindamisjuhised

1.
- Ammendavalt põhjendatud, miks $A = 1$: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, miks $B = 8$: 2 p
- Ammendavalt põhjendatud, miks $C = 4$: 2 p
- Järeldatud, et $D = 0$: 1 p
- Leitud õige summa 13: 1 p

Ainult õige vastuse (13) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui lisaks on esitatud täielik õige asendus ($A = 1$, $B = 8$, $C = 4$, $D = 0$) ilma põhjenduseta, siis anda 3 punkti. Ainult täieliku õige asenduse eest, kui selgitused ja õige vastus puuduvad, anda 2 punkti.

2.
- Põhjendatud, et ritta kirjutatavatest arvudest vähim on 289 ja suurim on 2312: 3 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud õige võrrand kas vähima või suurima arvu leidmiseks: *2 p*
- Loendatud seitsmed õigesti sajaliste kohal: 1 p
- Loendatud seitsmed õigesti kümneliste kohal: 1 p
- Loendatud seitsmed õigesti üheliste kohal: 1 p
- Leitud õige summa 602: 1 p

Ainult õige vastuse (602) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

3. Anname kaks eraldi skeemi erinevate lähenemiste hindamiseks.

Žürii lahendusele 1 vastav skeem:
- Märgitud, et kolmnurga CKD pindala on pool ristküliku $ABCD$ pindalast: 1 p
- Põhjendatud, et ristküliku $ABCD$ pindala on 15 cm^2: 1 p
- Järeldatud, et $|AD| = 3$ cm (või $|BC| = 3$ cm): 1 p
- Põhjendatud, et $|KL| = \frac{4}{3}$ cm: 1 p
- Põhjendatud, et $|BK| = 3$ cm: 1 p
- Järeldatud, et CKB on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk: 1 p
- Järeldatud, et $\angle CKL = 45^\circ$: 1 p

Žürii lahendusele 2 vastav skeem:

- Märgitud, et kolmnurkade CKL, CLB ja AKD alused suhtuvad nagu pindalad: 1 p
- Koostatud õige lineaarvõrrand, millest on võimalik leida lõigu KL poolpikkus: 1 p
- Õigesti leitud $|KL| = \frac{4}{3}$ cm: 1 p
- Põhjendatud, et $|BK| = 3$ cm: 1 p
- Põhjendatud, et $|AD| = 3$ cm (või $|BC| = 3$ cm): 1 p
- Järeldatud, et CKB on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk: 1 p
- Järeldatud, et $\angle CKL = 45^\circ$: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse ($\frac{4}{3}$ cm, 45°) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

Ainult ühe poole ($\frac{4}{3}$ cm või 45°) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4.
- Leitud kaartele kirjutatud arvude summa 9: 1 p
- Järeldatud, et algusruutu kirjutatakse tegevuse käigus kõik naturaalarvulised 9 kordsed ja ainult need: 1 p
- Vaadatud läbi juht, kus 2024 tekib ruutu A, ja saadud vastuolu: 1 p
- Vaadatud läbi juht, kus 2024 tekib ruutu B, ja järeldatud, et see on võimalik: 1 p
- Vaadatud läbi juht, kus 2024 tekib ruutu C, ja saadud vastuolu: 1 p
- Vaadatud läbi juht, kus 2024 tekib ruutu D, ja saadud vastuolu: 1 p
- Vaadatud läbi juht, kus 2024 tekib ruutu E, ja järeldatud, et see on võimalik: 1 p

Kui konkreetsete ruutude läbivaatust pole tehtud, aga on leitud arvule 2024 lähimad kaks 9 kordset 2016 ja 2025, siis anda selle eest 1 punkt lisaks.

Ainult täieliku õige vastuse (B, E) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult ühe õige ruudu või ühe õige ja ühe vale ruudu eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui õigeid ruute pole või on rohkem kui 1 vale ruut, siis selgituste puudumisel anda 0 punkti.

II osa hindamisjuhised

1.
- Koostatud võrrand $3(5a + b) = a + 5b$ või sellega ilmselgelt samaväärne võrrand: 2 p
- Võrrand lihtsustatud kujule $7a = b$: 1 p
- Põhjendatud, et emal oli poodi minnes 36 mingi kordse jagu eurosid: 1 p
- Leitud 36 ainus kordne 72, mis on 50 ja 100 vahel: 1 p
- Põhjendatud, et poes kulutas ema 48 eurot: 2 p

Ainult õige vastuse (48 eurot) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühiku puudumise või vale ühiku korral 1 punkt.

2.
- Lahendatud osa a): 4 p

  Sealhulgas:
  - Ammendavalt põhjendatud, et $\angle ACB = 40^\circ$: *3 p*
  - Järeldatud, et kolmnurga ABC sisenurkade suurused on $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$: *1 p*
- Lahendatud osa b): 3 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud, et kolmnurk ACD on võrdkülgne: *1 p*
  - Järeldatud, et kolmekordne lõigu AC pikkus võrdub kolmnurga ACD ümbermõõduga: *1 p*
  - Põhjendatud, miks nelinurga $ABDC$ ümbermõõt on kolmnurga ACD ümbermõõdust suurem: *1 p*

Ainult osa a) täieliku õige vastuse $(40^\circ, 70^\circ, 70^\circ)$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Osa b) täieliku õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

3. Anname kaks eri skeemi erinevate lähenemiste hindamiseks.

Žürii lahendusele 1 vastav skeem:
- Vaadeldud punkti C, kus auto jõudis esmakordselt jalgratturile järele: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et punktide A ja C vaheline kaugus on 15 km: 2 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud punktide A ja C vahelise kauguse leidmiseks õige lineaarvõrrand: *1 p*

- Ammendavalt põhjendatud, et punktide C ja B vaheline kaugus on 45 km: 3 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud punktide C ja B vahelise kauguse leidmiseks õige lineaarvõrrand: *2 p*
- Järeldatud, et punktide A ja B vaheline kaugus on 60 km: 1 p

Kui lahenduse teises pooles on vaadeldud punktide C ja B vahelise kauguse asemel kohe punktide A ja B vahelist kaugust ja koostatud lineaarvõrrand selle leidmiseks, siis arvestada punktide A ja B vahelise kauguse leidmise eest 4 punkti, sealhulgas õige võrrandi koostamise eest 3 punkti.

Žürii lahendusele 2 vastav skeem:

- Vaadeldud punkti C, kus auto jõudis esmakordselt jalgratturile järele: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et jalgrattur kattis punktide A ja C vahemaa $\frac{1}{2}$ tunniga: 2 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud õige lineaarvõrrand, leidmaks aeg, millega jalgrattur kattis punktide A ja C vahemaa: *1 p*
- Ammendavalt põhjendatud, et jalgrattur kattis punktide A ja B vahemaa 2 tunniga: 3 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud õige lineaarvõrrand, leidmaks aeg, millega jalgrattur kattis punktide A ja B vahemaa: *2 p*
- Järeldatud, et punktide A ja B vaheline kaugus on 60 km: 1 p

Ainult õige vastuse (60 km) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühiku puudumise või vale ühiku korral 1 punkt.

4.
- Leitud kõik 6-ga jagamisel tekkivad jäägid: 1 p
- Põhjendatud, et iga 6 käigu järel on kirjutatav arv 15 võrra suurem: 1 p
- Põhjendatud, et 2024 tekib ruudustikule 807 käigu järel (või lihtsalt paaritu arvu käikude järel): 1 p
- Vaadeldud ruudustiku värvimist malekorras: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et 2024 saab tekkida vaid nurgaruuduga vastasvärvi ühikruutu: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et 2024 saab tekkida igasse nurgaruuduga vastasvärvi ühikruutu: 1 p
- Leitud nurgaruuduga vastasvärvi ruutude arv 24: 1 p

Ainult õige vastuse (24) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 — Piirkonnavoor — **9. klass**

II osa hindamisjuhised

1.
- Leitud, et igasse pesumasinasse peab minema 7 paari sokke: 1 p
- Leitud, et iga pesumasin peab sööma 7 sokki: 1 p
- Leitud kõik võimalused punaste (või roheliste) sokkide paaride nõuetekohaseks jaotamiseks: 3 p

  Sealhulgas:
  - Eelnevast järeldatud, et igasse pesumasinasse peab minema paaritu arv punaste sokkide paare (või vastavalt 1 kuni 3 roheliste sokkide paari): *1 p*
- Põhjendatud, et ülejäänud sokkide jaotamine on üheselt määratud: 1 p
- Loendatud sobivad võimalused: 1 p

Ainult õige vastuse (6) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Avaldatud nurga ABD (või ACE) suurus nurga BAC suuruse kaudu: 2 p
- Avaldatud võrdhaarse kolmnurga ABD (vastavalt ACE) alusnurga suurus nurga BAC suuruse kaudu: 1 p
- Avaldatud nurga CAD (vastavalt BAE) suurus nurga BAC suuruse kaudu: 1 p
- Sarnaselt tuletatud nurga BAE (vastavalt CAD) suurus või sümmeetria põhjal väidetud, et $\angle BAE = \angle CAD$: 2 p
- Arvutatud $\angle DAE = 90^\circ$: 1 p

Ainult õige vastuse (90°) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Ammendavalt põhjendatud, et basseini täitumiseks kulub suure toru kaudu $\frac{3}{2}$ tundi ja väikse toru kaudu $\frac{9}{2}$ tundi: 3 p

  Sealhulgas:
  - Võrrandi kujul või sõnadega väljendatud seost, et basseini suure toru kaudu täitumise 3-kordse ja 1-kordse aja vahe on 3 tundi (või analoogset seost väikse toru kaudu täitumise aja suhtes): *1 p*
  - Sellest tuletatud basseini suure toru kaudu täitumise aeg (vastavalt väikse toru kaudu täitumise aeg): *1 p*

- Tuletatud ka väikse toru kaudu täitumise aeg (vastavalt suure toru kaudu täitumise aeg): *1 p*

◦ Ühe toru kaudu täitumise aegadest tuletatud kahe toru kaudu täitumise aeg $\frac{9}{8}$ tundi: 4 p

Sealhulgas:

- Tuletatud vee vooluhulk suures torus $\frac{2}{3}$ basseinitäit tunnis: *1 p*
- Tuletatud vee vooluhulk väikses torus $\frac{2}{9}$ basseinitäit tunnis: *1 p*
- Tuletatud vee summaarne vooluhulk kahes torus $\frac{8}{9}$ basseinitäit tunnis: *1 p*
- Järeldatud, et basseini täitumiseks kahe toru kaudu kulub $\frac{9}{8}$ tundi: *1 p*

Ainult õige vastuse ($\frac{9}{8}$ tundi) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult vastuse „jah“ eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4. ◦ Arvutatud välja ühe, kahe, kolme ja nelja esimese positiivse täisarvu faktoriaalide summad: 2 p

Sealhulgas:

- Arvutatud välja kahe ja kolme esimese positiivse täisarvu faktoriaalide summad: *1 p*

◦ Leitud, et esimesest neljast positiivsest täisarvust sobivad ülesande tingimustega parajasti 1 ja 3: 1 p

Sealhulgas:

- Leitud, et ülesande tingimusega sobib arv 3 ning ei sobi 2 ja 4: *1 p*

◦ Märgitud, et suuremate arvude faktoriaalid lõpevad nulliga: 1 p

◦ Eelnevast järeldatud, et viie ja enama esimese positiivse täisarvu faktoriaalide summad lõpevad numbriga 3: 1 p

◦ Põhjendatud, et ühegi täisarvu ruut ei lõpe numbriga 3: 1 p

◦ Eelnevast järeldatud, et rohkem sobivaid arve pole: 1 p

Skeemi eelviimase rea eest punkti saamiseks piisab, kui õpilane kas vaatab süstemaatiliselt läbi kõik 10-ga jagamisel tekkivad jäägid või vähemalt paneb kirja täieliku ja õige nimekirja kõigist numbritest, millega täisarvu ruut saab lõppeda.

Ainult täieliku õige vastuse (1 ja 3) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult vastuse 3 eest ilma selgitusteta anda samuti 1 punkt. Ülejäänud juhtudel anda selgituste puudumisel 0 punkti.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **10. klass**

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Ave Külter)*

Erinevaid lähenemisi kasutavate tööde hindamiseks kasutati nelja eri skeemi. Kasutatud skeemis välja toodud lahenduse osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem lahendusele, kus koostatakse võrrand 5*-kiloste pakkide arvu suhtes (žürii lahendus 1).*

- Tähistatud 5-kiloste pakkide arv (žürii lahenduses z) ja märgitud, et neis pakkides on kokku $5z$ kg suhkrut: 1 p
- Järeldatud, et 2-kilostes pakkides on samuti $5z$ kg suhkrut ja neid pakke on $2{,}5z$: 1 p
- Leitud 2-kiloste ja 5-kiloste pakkide koguarv $3{,}5z$ ning 1-kiloste pakkide arv $3{,}5z + 55$ või $3{,}5z - 55$: 1 p
- Koostatud õige lineaarvõrrand esimese juhu jaoks ja leitud, et lahend pole täisarv: 1 p
- Koostatud õige lineaarvõrrand teise juhu jaoks ja leitud lahend $z = 154$: 1 p
- Leitud andmetest arvutatud suhkrupakkide koguarv 1023: 2 p

Skeem lahendusele, kus koostatakse võrrand 2*-kiloste pakkide arvu suhtes (žürii lahendus 2).*

- Tähistatud 2-kiloste pakkide arv (žürii lahenduses y) ja märgitud, et neis pakkides on kokku $2y$ kg suhkrut: 1 p
- Järeldatud, et 5-kilostes pakkides on samuti $2y$ kg suhkrut ja neid pakke on $0{,}4y$: 1 p
- Leitud 2-kiloste ja 5-kiloste pakkide koguarv $1{,}4y$ ning 1-kiloste pakkide arv $1{,}4y + 55$ või $1{,}4y - 55$: 1 p
- Koostatud õige lineaarvõrrand esimese juhu jaoks ja leitud, et lahend pole täisarv: 1 p
- Koostatud õige lineaarvõrrand teise juhu jaoks ja leitud lahend $y = 385$: 1 p
- Leitud andmetest arvutatud suhkrupakkide koguarv 1023: 2 p

Skeem lahendusele, kus koostatakse võrrand 1*-kiloste pakkide arvu suhtes (žürii lahendus 3).*

- Tähistatud 1-kiloste pakkide arv (žürii lahenduses x) ja leitud, et ülejäänud pakkides on kokku $2024 - x$ kilogrammi suhkrut: 1 p
- Järeldatud, et nii 2-kilostes kui ka 5-kilostes pakkides on kokku $\frac{2024 - x}{2}$ kilogrammi suhkrut: 1 p
- Järeldatud, et 2-kiloste ja 5-kiloste pakkide arvud on vastavalt $\frac{2024 - x}{4}$ ja $\frac{2024 - x}{10}$ ning nende koguarv on $\frac{7(2024 - x)}{20}$: 1 p
- Koostatud võrrand $\frac{7(2024 - x)}{20} = x - 55$ ja leitud, et lahend pole täisarv: 1 p
- Koostatud võrrand $\frac{7(2024 - x)}{20} = x + 55$ ja leitud lahend $x = 484$: 1 p
- Leitud andmetest arvutatud suhkrupakkide koguarv 1023: 2 p

Skeem lahendusele võrrandisüsteemi abil (žürii lahendus 4).

- Koostatud õige 3 muutujaga võrrandisüsteem vähemalt ühe juhu jaoks kahest: 3 p
- Koostatud õige 3 muutujaga võrrandisüsteem teise juhu jaoks või selgitatud võrrandisüsteemide erinevust: 1 p
- Lahendi leidmisega või arutlusega jaguvuse kaudu välja selgitatud, et ühel süsteemil täisarvuline lahend puudub: 1 p
- Leitud teise süsteemi lahend (kõigi muutujate väärtused): 1 p
- Leitud suhkrupakkide koguarv 1023: 1 p

Ainult õige vastuse (1023) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

2. *(Andres Talts)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud üht liiki linnu poolt söödavate mannapakkide arv minutis (või sekundis): 1 p
- Leitud ka teist liiki linnu poolt söödavate mannapakkide arv samas ajaühikus: 2 p
- Leitud 20 varblase ja 24 tuvi poolt koos söödud mannapakkide arv minutis (või sekundis): 2 p
- Leitud sekundite arv, mis kulub 20 varblasel ja 24 tuvil ühe mannapaki söömiseks: 2 p

Ainult õige vastuse (54) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

3. *(Kadi Siigur)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Esimene arv esitatud korrutise või jagatisena ülesande lahendamise seisukohalt kasulikul viisil: 1 p

- Teine arv esitatud korrutise või jagatisena ülesande lahendamise seisukohalt kasulikul viisil: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 5 p

Arvutusvigade eest võeti punkte maha.

Ainult õige vastuse (teine on suurem) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti.

4. *(Aleksei Ganyukov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Saadud avaldis $1111a + 222b + 33c + 4d$ või selle alternatiiv: 1 p
- Tõestatud, et vähimas arvus $\overline{abcd}$, mille puhul kehtib võrratus $1111a + 222b + 33c + 4d \geqslant 2024$, kehtib $b = 3$: 2 p
- Tõestatud, et vähimas arvus $\overline{abcd}$, mille puhul kehtib võrratus $1111a + 222b + 33c + 4d \geqslant 2024$, kehtivad $c = 7$ ja $d = 4$: 2 p
- Kontrollitud, et arv 1374 on eriline: 2 p

Põhjendamata õige vastuse eest anti 1 punkt. Teiste eriliste arvude leidmise eest punkte ei antud.

Tõestustes esinevate puuduste eest võeti punkte maha. Enamasti ei antud punkte nende argumentide eest, mis esinesid nii õigete kui ka valede väidete põhjendamisel.

Väide, et $n = \overline{abcd}$ peab olema unikaalne arv, mille puhul kehtib võrdus $1111a+222b+33c+4d = 2024$, ei ole ilmselge. Näiteks arvu 2065 võib saada kahest erinevast arvust 1386 ja 1420, liites kõik 10 temas sisalduvat arvu. On väärt rõhutada üle, et lahenduse korretsuseks on vaja vaadelda võrratust $1111a + 222b + 33c + 4d \geqslant 2024$, mitte võrdust.

Kasutu proovimise eest anti 0 punkti. Kui muud progressi ei olnud, siis korrektse tõestuse eest, et vähim eriline arv on neljakohaline, anti 1 punkt.

Tasub märkida, et $n = 998$ on suurima võimaliku summaga kolmekohaline arv ja $n = 1298$ on suurima võimaliku summaga arv vahemikus 1000–1299.

5. *(Kristjan-Erik Kahu)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $\angle AOB = 106^\circ$: 1 p
- Näidatud, et $\angle AOM = 16^\circ$: 2 p
- Näidatud, et $\angle COM = 16^\circ$: 2 p
- Lahendus lõpuni viidud: 2 p

Õige vastuse (53°) eest ilma korrektse seletuseta punkte ei antud.

Pisipuuduste eest täislahenduses võeti 1 punkt maha.

6. *(Raul Kangro)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud seos korrektse näidu minuti- ja tunniosuti asendite vahel: 1 p
- Juku juht täielikult analüüsitud: 3 p

  Sealhulgas:
  - Korrektselt analüüsitud vähemalt üks mittetäistunniline või pooltunniline juht ja toodud õige väide üldjuhu kohta: *1 p*
  - Tehtud üldjuhu tõestuse jaoks vajalikud tähelepanekud: *1 p*
  - Korrektne ja täielik tõestus üldjuhu jaoks lõpule viidud: *1 p*
- Juhani juht täielikult analüüsitud: 3 p

  Sealhulgas:
  - Korrektselt analüüsitud vähemalt üks mittetäistunniline või pooltunniline juht ja toodud õige väide üldjuhu kohta: *1 p*
  - Tehtud üldjuhu tõestuse jaoks vajalikud tähelepanekud: *1 p*
  - Korrektne ja täielik tõestus üldjuhu jaoks lõpule viidud: *1 p*

Mõlema juhu jaoks korrektse väite esitamine ilma selgitusteta andis 1 punkti. Ainult ühe juhu jaoks õige väite esitamise eest ilma korrektsete täiendavate selgituste ja erijuhtude analüüsita (ainult piltidest ei piisa) punkte ei antud.

Õpilastel oli suuri raskusi ülesandest arusaamisega. Väga tihti arvati, et aitab ühe näite toomisest, millal poiste väited on valed, kuigi ülesande kohaselt tuli tuua näide, millise kella näidu korral on väide õige (või siis näidata, et väited on alati valed). Samuti kiputi arvama, et nn suvalise valitud näite või paari näite läbivaatamine tõestab väite üdljuhul, mis ei ole muidugi õige.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **11. klass**

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Helli Juurma)*

Erinevaid lähenemisi kasutavate lahenduste hindamiseks kasutati kolme eri skeemi. Kasutatud skeemis välja toodud lahenduse osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem lahendusele, kus koostatakse võrrand esimese köite lehekülgede arvu suhtes (žürii lahendus 1).

- Tähistatud esimese köite lehekülgede arv (žürii lahenduses x) ja avaldatud teise köite lehekülgede arv $x + 100$: 1 p
- Ülesande tingimusi kasutades saadud kolmanda köite lehekülgede arvuks $3x - 200$: 1 p
- Märgitud, et esimeses köites ei saa olla samapalju lehekülgi kui teises ja kolmandas kokku, või koostatud selle juhu jaoks võrrand ja tuvastatud ebasobiv lahend: 1 p
- Koostatud õige lineaarvõrrand juhuks, kui teises köites on samapalju lehekülgi kui esimeses ja kolmandas kokku, ja leitud lahend $x = 100$: 1 p
- Koostatud õige lineaarvõrrand juhuks, kui kolmandas köites on samapalju lehekülgi kui esimeses ja teises kokku, ja leitud lahend $x = 300$: 1 p
- Leitud õige triloogia lehekülgede koguarv ühel võimalikul juhul: 1 p
- Leitud õige triloogia lehekülgede koguarv teisel võimalikul juhul: 1 p

Skeem lahendusele, kus koostatakse võrrand teise köite lehekülgede arvu suhtes (žürii lahendus 2).

- Tähistatud teise köite lehekülgede arv (žürii lahenduses y) ja avaldatud esimese köite lehekülgede arv $y - 100$: 1 p
- Ülesande tingimusi kasutades saadud kolmanda köite lehekülgede arvuks $3y - 500$: 1 p
- Märgitud, et esimeses köites ei saa olla samapalju lehekülgi kui teises ja kolmandas kokku, või koostatud selle juhu jaoks võrrand ja tuvastatud ebasobiv lahend: 1 p
- Koostatud õige lineaarvõrrand juhuks, kui teises köites on samapalju lehekülgi kui esimeses ja kolmandas kokku, ja leitud lahend $y = 200$: 1 p

- Koostatud õige lineaarvõrrand juhuks, kui kolmandas köites on samapalju lehekülgi kui esimeses ja teises kokku, ja leitud lahend $y = 400$: 1 p
- Leitud õige triloogia lehekülgede koguarv ühel võimalikul juhul: 1 p
- Leitud õige triloogia lehekülgede koguarv teisel võimalikul juhul: 1 p

Skeem lahendusele võrrandisüsteemi abil (žürii lahendus 3).

- Märgitud, et esimeses köites ei saa olla samapalju lehekülgi kui teises ja kolmandas kokku, või koostatud selle juhu jaoks võrrandisüsteem ja tuvastatud ebasobiv lahend: 1 p
- Koostatud õige 3 tundmatuga lineaarvõrrandisüsteem ühel võimalikul juhul: 2 p
- Koostatud õige 3 tundmatuga lineaarvõrrandisüsteem ka teisel võimalikul juhul või selgitatud, mida vaja muuta: 1 p
- Leitud ühe võrrandisüsteemi lahend (kõigi muutujate väärtused): 1 p
- Leitud teise võrrandisüsteemi lahend (kõigi muutujate väärtused): 1 p
- Leitud õige triloogia lehekülgede koguarv mõlemal juhul: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse (400 ja 1400) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Ainult osalise või valesid variante sisaldava vastuse eest anti 0 punkti.

2. *(Ülle Hüva)*

Erinevaid lähenemisi kasutavate lahenduste hindamiseks kasutati kolme eri skeemi. Kasutatud skeemis välja toodud lahenduse osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem lahendusele, kus leitakse soodsate ja kõigi võimaluste arv 2 kohukese valikuks (žürii lahendused 1 ja 2).

- Leitud koos põhjendusega soodsate võimaluste arv 16: 3 p
- Leitud koos põhjendusega kõigi võimaluste arv 28: 3 p
- Leitud otsitav tõenäosus $\frac{4}{7}$ taandumatu murruna või perioodilise kümnendmurruna: 1 p

Skeem lahendusele, kus leitakse soodsate ja kõigi võimaluste arv viimase kohukese valikuks (žürii lahendus 3).

- Sõnastatud idee võtta kohukesi ükshaaval või ilmselgelt seda ideed kasutatud: 2 p
- Leitud, et sõltumata esimese kohukese valikust on teise kohukese valikuks 7 võimalust: 2 p
- Leitud, et sõltumata esimese kohukese valikust on esimesest erinevat sorti kohukese valikuks 4 võimalust: 2 p

- Leitud otsitav tõenäosus $\frac{4}{7}$ taandumatu murruna või perioodilise kümnendmurruna: 1 p

Ainult õige vastuse ($\frac{4}{7}$ või samaväärne perioodiline kümnendmurd) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Punkti ei antud, kui harilik murd oli taandamata, kümnendmurru periood polnud täielikult välja kirjutatud või polnud arusaadavalt väljendatud, et tegu on perioodiga. Samad tingimused rakendusid ka hindamisskeemide viimase rea järgi punkti andmisel.

3. *(Urve Kangro)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kirja pandud või tuletatud vajalik 11-ga jaguvuse tunnus: 2 p
- Järeldatud, et paaris- ja paaritutel kohtadel olevate numbrite summad peavad olema 17 ja 28: 1 p
- Leitud õige suurim tingimustele vastav arv: 1 p
- Põhjendatud, miks see arv on suurim võimalik: 1 p
- Leitud õige vähim tingimustele vastav arv: 1 p
- Põhjendatud, miks see arv on vähim võimalik: 1 p

Kui milegi muu eest punkte ei saanud, siis lihtsalt õige vastuse eest (nii suurim kui ka vähim arv) sai 2 punkti. Ainult ühe (kas suurima või vähima) õige vastuse eest sai 1 punkti. Samuti sai 1 punkti juhul, kui oli leitud kaks tingimustele vastavat arvu, mis olid suurimale ja vähimale piisavalt lähedased (suurima puhul algusega 987..., vähima puhul algusega kuni 123...). Ka juhul, kui oli kirja pandud mingi 11-ga jaguvuse tunnus, mida ei olnud nii lihtne kasutada, anti 1 punkt (näiteks mitmes töös oli tunnuseks see, et arvust ilma kolme viimase numbrita lahutades kolmest viimasest numbrist moodustatud arv peab jaguma 11-ga).

Üllatavalt palju ei teatud või ei osatud tuletada 11-ga jaguvuse tunnust. Seda on lihtne tuletada, kui vaadelda arvu üksikute numbrite kaupa ja panna tähele, et arvu $a \cdot 10^{2k}$ jääk jagamisel 11-ga on sama mis arvul a (sest $10^{2k} - 1$ jagub 11-ga) ning arvu $a \cdot 10^{2k+1}$ jääk jagamisel 11-ga on sama mis arvul $-a$ (sest $10^{2k+1} + 1$ jagub 11-ga).

Mõnes töös esines järgmine „lahendus“: selleks, et arv jaguks 11-ga, peab tema paaris- ja paarituarvulistel kohtadel olevate numbrite summad olema võrdsed (see on tegelikult piisav, mitte tarvilik tingimus). Kuna kõigi numbrite summa on 45, siis seda pole võimalik jagada kaheks võrdsete summadega osaks. Seega null pole number ja ühte paaritut arvu tuleb kasutada kaks korda. Suurima arvu jaoks kasutame kaks korda üheksat, saame 9987653412, vähima arvu jaoks kasutame kaks korda ühte, saame 1123457698. Kuna sellisel juhul suur osa lahendusest on sarnane esialgse ülesande lahendusega, kuigi mõnevõrra lihtsam, siis sellise lahenduse eest sai 3 punkti.

Samas tööde eest, kus sama tunnuse kasutamisest tehti järeldus, et selliseid kümnekohalisi arve üldse ei leidu, said 0 punkti.

Palju esines lihtsalt proovimist. Reeglina sellised tööd lahenduseni ei jõudnud.

Ülesandele saaks läheneda ka järgnevalt: kõige suurem kümnekohaline arv, mis sisaldab kõiki numbreid, on 9876543210, selle jääk 11-ga jagamisel on 6. Lahutame sellest 6 ning siis proovime lahutada võimalikult väikeseid 11 kordseid nii, et viimased viis numbrit jääksid hulka $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. See lähenemine võiks põhimõtteliselt sihile viia, aga vajaminevate tehete arv oleks väga suur, sest õige lahendini jõudmiseks on vaja kokkuvõttes lahutada esialgsest arvust 19080. Sellise lähenemisega keegi sihile ei jõudnud.

Veel üks võimalik idee võiks olla märgata, et jagades 11-ga 10-kohalise arvu, mille esimesed numbrid on 98765, on tulemuseks $89786abcd$, ja seejärel püüda analüüsida, mis võiks olla numbrid a, b, c, d, et 11-ga korrutamisel saaksime sobivad viimased numbrid. Mõnedes töödes oli püütud sarnase ideega läheneda, aga jälle läheks lahendus väga pikale ja üheski töös ei olnud sellise taolise lähenemisega kusagile jõutud.

4. *(Aleksandr Šved)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud juurealuse avaldise $2024 + 640\sqrt{10}$ esitus kaksliikme ruuduna, või rakendatud teisendusi, mis võimaldavad teguri $a - 32$ sulgude ette tuua, kus a on otsitav väärtus: 4 p

  Sealhulgas:
  - Tähistatud otsitav väärtus ning vabanetud ühest juurest, viies $\sqrt{1000}$ teisele poole ja tõstes võrduse pooled ruutu: *1 p*
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

Ainult õige vastuse (32) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

5. *(Artur Avameri)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa õigesti lahendatud: 3 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et $\angle BEC = \angle BFC$: *1 p*
  - a)-osa lahendus lõpule viidud: *2 p*
- b)-osa õigesti lahendatud: 4 p

Ainult a)-osa õige vastuse eest ilma põhjenduseta punkte ei antud, kuivõrd vastust oli võimalik täpse joonisega abil ära arvata. Kui muidu korrektses lahenduses esines pisivigu, siis võeti 1 punkt maha.

6. *(Birgit Veldi)*

Erinevate lähenemistega tööde hindamiseks kasutati kaht eri skeemi. Kummagi skeemi kasutamisel skeemis märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem lahendusele, kus konstrueeritakse üksühene vastavus (žürii lahendus 1):

- Esitatud idee vaadata Arvi järjendeid kolmeste plokkidena või seda ideed kasutatud: 1 p
- Samastatud täishäälikud ja 3-ga lõppevad kolmesed plokid: 1 p
- Samastatud kaashäälikud ja 1-ga või 2-ga lõppevad kolmesed plokid: 1 p
- Leitud sobivad kombinatsioonid viimase kolme numbri jaoks, kui järjend lõppeb 3-ga: 1 p
- Samastatud täpitähed ja 3-ga lõppevad viimaseks plokiks sobivad kolmesed plokid: 1 p
- Selle kõige põhjal tehtud õige lõppjäreldus: 2 p

Skeem loendamist kasutavale lahendusele (žürii lahendus 2):

- Esitatud Tähti kirjutatud järjendite arv kahe ja kolme astmete ning mingi muu arvu korrutisena (või mõne muu lühikese avaldisena) või arvutatud see välja: 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud kõik võimalused täis- ja kaashäälikute paigutuseks Tähti järjendites: *1 p*
- Esitatud Arvi kirjutatud järjendite arv kahe ja kolme astmete ning mingi muu arvu korrutisena (või mõne muu lühikese avaldisena) või arvutatud see välja: 3 p

  Sealhulgas:
  - Märgatud, et Arvi järjendites kohtadele $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11$ sobivad kõik arvud ja/või leitud sobivad kombinatsioonid viimase kolme numbri jaoks: *1 p*
- Selle kõige põhjal tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Teise skeemi esimese ja teise 3-punktise osa eest anti 1 punkt vähem, kui järjendite arv oli esitatud lihtsustamata kujul kahe ja kolme astmetest ning viiest koosnevate korrutiste summana või tehtud väike arvutusviga. Kui nii Arvi kui ka Tähti järjendite arv esitati lihtsustamata avaldisena, aga jõuti siiski õige lõpptulemuseni, siis selle eest punkte ei kaotanud.

Ainult vastuse (niisama suur) ega suvaliste arvutuste eest punkte ei saanud.

Ülesanne osutus raskeks. Osa õpilasi üritas ilma piiranguteta variantidest ebasobivaid maha lahutada, aga siin takerduti enamasti selle taha, et loeti mõnda võimalust mitu korda. Näiteks lahutades maha kahe kõrvuti asetseva täishäälikuga võimalusi, loetakse seda võimalust, kus kolm täishäälikut on kõrvuti, mitu korda.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **12. klass**

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Ehtel Timak)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Selgitatud, et ruutvõrrandil leidub täpselt üks lahend parajasti siis, kui diskriminant on null: 1 p
- Koostatud vastav võrrand k suhtes: 2 p
- Leitud selle võrrandi lahend $k = 0$: 1 p
- Leitud selle võrrandi lahend $k = 2024$: 1 p
- Käsitletud eraldi juhtu $k = -1$: 1 p
- Põhjendatud, et ka juhul $k = -1$ leidub täpselt üks lahend: 1 p

Lahendi $k = 0$ leidmise eest anti skeemi kolmanda rea järgi punkt ka juhul, kui $k = 0$ oli esialgsesse võrdusse lihtsalt sisse asendatud ja tehtud kindlaks, et sel juhul on võrrandil täpselt üks reaalarvuline lahend.

Ainult täieliku õige vastuse $(-1, 0, 2024)$ eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Kui ainus erinevus õigest vastusest oli variandi -1 puudumine, siis anti samuti 1 punkt, ülejäänud juhtudel anti selgituste puudumisel 0 punkti.

2. *(Julia Polikarpus)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võimaluste hulk jaotatud kolmeks sõltuvalt sellest, kui palju täringuid on ühesuguse silmade arvuga: 1 p
- Õigesti loendatud võimalused, kus kõigil täringutel on ühepalju silmi: 1 p
- Õigesti loendatud võimalused, kus kahel täringul on sama silmade arv ja kolmandal neist erinev: 2 p
- Õigesti loendatud võimalused, kus kõigil täringul on erinev silmade arv: 2 p
- Leitud võimaluste arvude summa 56: 1 p

Ainult õige vastuse (56) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Punkt anti ka juhul, kui vastus oli antud väljaarvutamata kujul C_8^5 või C_8^3.

3. *(Martin Rahe)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Välja toodud, et täisarv ja tema viies aste annavad 10-ga jagamisel sama jäägi: 1 p
- Põhjendatud, et esimest tüüpi käik ei muuda tahvlil olevate arvude summa jääki 10-ga jagamisel: 2 p
- Põhjendatud, et teist tüüpi käik ei muuda tahvlil olevate arvude summa jääki 10-ga jagamisel: 2 p
- Leitud algseisus tahvlil olevate arvude summa jääk 10-ga jagamisel: 1 p
- Järeldatud vastus: 1 p

Ülesanne lahendub analoogselt, kui vaadata jääke 5-ga jagamisel, mistõttu selle jaoks ei ole koostatud eraldi skeemi.

Kuna ülesande küsimus on binaarne, ei antud punkte ainult vastuse eest. Skeemi viimase rea järgi punkti saamiseks pidi õige vastus olema järeldatud matemaatiliselt korrektsel viisil.

Ülesanne osutus üllatavalt raskeks, valdav enamus lahendajaid ei taibanud vaadata jääke ning jäi kinni mittetöötava konstruktsiooni ehitamisele. Seeeest peaaegu kõik lahendajad, kes taipasid vaadata tahvlil olevate arvude summa jääki 10-ga või 5-ga jagamisel, jõudsid täislahenduseni. Suur hulk esitatud lahendustest väitis, et kuna algselt oli tahvlil olevate arvude summa paaris ning kumbki käikudest ei muuda summa paarsust, siis on võimalik 2024-ga lõppevat arvu kui paarisarvu viimaseks arvuks konstrueerida. See lähenemine ei ole aga korrektne, kuna näitab vaid, et paarsusega ei õnnestunud näidata, et küsitud konstruktsioon on võimatu, millest aga ei saa järeldada, et see on tingimata võimalik. Leidus ka arvestataval hulgal lahendusi, mis kõigepealt konstrueerisid tahvlile arvu 2024, näiteks kasutades arve 1 ja 2023 esimest tüüpi käigus, ning seejärel panid ülejäänud arvud paaridesse viisil, mis esimest tüüpi käiguga annaks tulemuseks 0-ga lõppeva arvu. Kui selline jaotamine oleks võimalik, saaks tõepoolest esimest tüüpi käiguga seejärel kõik 0-ga lõppevad arvud arvud üheks 0-ga lõppevaks arvuks muuta ning lõpetuseks 0-ga lõppeva arvu ja 2024 muuta 2024-ga lõppevaks arvuks. Paraku ei ole arvude sel viisil paari panemine aga täiel määral võimalik ning seda lähenemist kasutanud lahendused olid teinud vea kas tahvlil olevaid arve lugedes või arvutustes.

4. *(Hendrik Vija)*

Žürii lahenduste 1 ja 3 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võrrandid korrektselt kombineeritud üheks võrrandiks, nii et muutujate arv väheneb: 3 p

  Sealhulgas:
  - Teostatud asendus $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f}$: *2 p*

- Tekkiv võrrand teisendatud kujule, mis on ilmselgelt võimatu arvude positiivsuse tõttu (nt $a^2d^2 + b^2c^2 + abcd = 0$): 2 p
- Põhjendatud, miks tekkiv võrrand on võimatu: 2 p

  Sealhulgas:
  - Väidetud ilma põhjendamata, et see on võimatu: *1 p*

Ülejäänud lahendusmeetodite puhul anti täislahenduse eest 7 punkti. Lahendusi, kus nende meetoditega oleks jõutud pooliku lahenduseni, ei leidunud. Ainult õige vastuse (ei) eest ilma põhjenduseta anti 0 punkti.

Ülesanne osutus oodatust natuke lihtsamaks. Enamikus töödes, kus suudeti kaks võrrandit üheks kombineerida, suudeti ka lahendus lõpule viia. Paljudes töödes aga ei jõutudki võrrandite korrektse kombineerimiseni, sest tehti juba enne seda mõni saatuslik viga. Üheks tüüpveaks oli see, et pärast esimese võrrandi teisendamist kujule $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{e}{f}$ väideti, et $ad + bc = e$ ja $bd = f$. See ei vasta tõele, sest murdu $\frac{e}{f}$ võib vabalt taandada-laiendada. Teiseks tüüpveaks oli see, et ei lähenetudki ülesandele algebraliselt, vaid prooviti ainult anda muutujatele erinevaid (tüüpiliselt täisarvulisi) väärtusi. Nendes töödes uuriti sageli ka arvude tegureid. Selline lähenemine aga ei oma selles ülesandes mingit mõtet, sest ülesande tekstis pole öeldud, et arvud peaksid olema täisarvud.

5. *(Härmel Nestra)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Osa a) täislahendus: 3 p

  Sealhulgas mediaani pikkuse valemit kasutava mõttekäigu puhul:
  - Asendatud mediaani pikkus valemist tõestatavasse võrratusse: *1 p*
  - Algebraliste teisendustega saadud võrratus $(b-c)^2 < a^2$ või midagi ilmselgelt samaväärset: *1 p*
  - Põhjendatud selle võrratuse kehtivus: *1 p*
- Osa b) täislahendus: 4 p

  Sealhulgas mediaani pikkuse valemit kasutava mõttekäigu puhul:
  - Asendatud mediaani pikkus valemist tõestatavasse võrratusse: *1 p*
  - Algebraliste teisendustega saadud võrratus $2(b-c)^2 < a^2$ või midagi ilmselgelt samaväärset: *1 p*
  - Leitud kolmnurga külgede pikkused, mis seda võrratust ei rahulda: *2 p*

Mediaani pikkuse valem loeti tuntuks ja selle põhjendust ei nõutud. Osas a) ei võetud punkte maha pisipuuduste pärast nagu absoluutväärtuse märkide puudumine lõpus või kolmnurgavõrratuse mainimata jätmine. Osa b) skeemi viimase rea järgi anti 1 punkt, kui töös oli esitatud vaid töötav idee, kuidas võrratust mitte rahuldavat kolmnurka konstrueerida, kuid seda tehtud ei olnud.

Ainult õige vastuse (jah, ei) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti. Ainult mediaani pikkuse valemi väljakirjutamise või tuletamise eest anti 0 punkti.

Mustandeid selle ülesande hindamisel ei arvestatud.

Enamus täislahenduseni jõudnud õpilastest kasutas mediaani pikkuse valemit, kusjuures suur osa tuletas valemi koosinusteoreemi abil.

6. *(Richard Luhtaru)*

Erinevate lähenemiste hindamiseks kasutati kaht eri skeemi.

Žürii lahenduse 1 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Idee loendada lõikuvate sirgete paare: 1 p
- Leitud, et punktis P_i on lõikuvate sirgete paaride arv $p_i(p_i - 1)$: 1 p
- Järeldatud, et $p_1(p_1 - 1) + \ldots + p_k(p_k - 1) \leqslant n(n - 1)$: 2 p
- Tõestatud, et $p_1 + \ldots + p_k \leqslant n(n - 1)$: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Žürii lahenduse 2 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et kui kõik sirged lõikuvad erinevates punktides (ja paralleelseid sirgeid pole), siis kehtib võrdus: 2 p

  Sealhulgas:
  - Hüpotees, et võrratuse vasaku poole väärtus on sellisel juhul suurim, aga võrdus on leidmata: *1 p*
- Esitatud idee vaadelda, kuidas muutub $p_1^2 + \ldots + p_k^2$ sirgete nihutamisel, kui mõnes punktis lõikub rohkem kui kaks sirget, või seda ideed kasutatud: 1 p
- Leitud, et ühe sirge nihutamisel suureneb võrratuse vasaku poole väärtus vähemalt $2m - 3 > 0$ võrra: 3 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Ülesanne oli oodatult raske. Tore oli aga näha, et paljud õpilased tegid ülesandes edusamme. Osalisi punkte teenisid paljud, peamiselt žürii lahenduse 2 ideede eest. Samuti oli meeldiv näha omapäraseid ja loovaid lahendusi. Eriti elegantne oli tabelisse arvude kirjutamise idee, kust topeltloendamise abil võrratus otse välja tuleb (lisatud žürii lahendusena 3).

Mõned lahendused olid žürii lahendusega 2 sarnased, aga lähenesid sirgete „nihutamisele" teistpidi, alustades $p_i = 2$ konfiguratsioonist ja näidates, et kui mõned sirged lõikuvad pärast nihutamist samas punktis, siis võrratuse vasak pool väheneb. Kuigi see on žürii lahendusega väga sarnane, siis niipidi lähenedes ei ole täpsemate põhjendusteta ilmne, et iga n sirge konfiguratsioon on võimalik selliselt nihutades saavutada. Seetõttu said sellised tööd 6 punkti.

Punkte ei antud konkreetsete näidete (nt $n = 3$) või erijuhtude (nt kõik sirged lõikuvad ühes punktis) analüüsimise eest, kui kasutatud ideed ei üldistunud üldjuhule või ei olnud muidu kasulikud mõnes täislahenduses.

Kokkuvõte

Üleriigilisele žüriile laekus hindamise ühtlustamiseks kokku 7. klassi töid 75, 8. klassi töid 74 ja 9. klassi töid 73. Üleriigilise žürii poolsed põhikooli tööde kontrollijad olid järgmised.

7. klass:	Toomas Tennisberg
	Peeter Aleksander Randla
8. klass:	Sandra Schumann
	Marko Tsengov
9. klass:	Oleg Košik
	Andres Alumets

Sel aastal vaatas üleriigiline žürii iga klassi igas töös läbi kõik ülesanded.

Järgnevad žürii esimehe ja tööde hindajate kommentaarid on kirjutatud üleriigilise žürii käes olnud tööde põhjal. Iga klassi II osa iga ülesande kohta on eraldi kommentaarid järgnevatel lehekülgedel.

7. klass

Ülesannete komplekt tervikuna osutus üsnagi lihtsaks. Tööd olid piirkondades üsna kvaliteetselt hinnatud, suuremaid punktide muudatusi oli vaja teha üksikuid.

8. klass

Test oli jõukohase raskusastmega. Oodatult oli raskeim 7. ülesanne, samas oli ka 3. ülesandes kõrvalolevatest rohkem eksimusi. Pisut segadust oli 5. ülesande ühikutega: matemaatiliselt ebakorrektse kirjaviisi või ebakorrektse ühiku kirjutamise eest kaotati üllatavalt palju punkte.

Praktiliselt igast II osa ülesandest jäi kõlama üks puudujääk: isegi kui lahend on leitud, tuleb näidata, et tegemist on ainsa / kogu lahendiga, kui ülesande püstitus ei nõua vaid lahendi leidumise näitamist.

9. klass

Žürii on paljudel aastatel just 9. klassi II osa raskusega üle pingutanud, kuid sel aastal paistis komplekt olevat õnnestunud või isegi liiga lihtne. Kuna seoses testi kaalu vähenemisega on varasemast tähtsam, et ka II osas oleks suuremale hulgale õpilastest jõukohaseid ülesandeid, siis žürii pööras võistlust ette valmistades seekord 9. klassi raskusastmele rohkem tähelepanu. Üks ülesanne vahetati veel viimasel hetkel lihtsama vastu välja.

Testi ülesandes 7 otsustas üleriigiline žürii anda erinevalt hindamisjuhistes sätestatust 1 punkti ka vastuse $\{9,-9,27,-27\}$ eest, sest selle vastuseni jõudnud õpilased oli õigest vastusest mitte kaugemal kui teised selle ülesande vastuse 1 punkti eest teeninud õpilased.

Testi kõige lihtsamateks ülesanneteks olid ülesanded 1 ja 4, kõige raskemaks aga ülesanne 6, kus anti tihti tüüpiliseks valeks vastuseks 20 kraadi.

Kontrollijate kommentaarid

1. Ülesanne osutus üsnagi jõukohaseks. Peamine komistuskoht oli võimaluse $C = 3$ välistamata jätmine. Üldjuhul said sellised tööd üleriigiliselt žüriilt 6 punkti.

2. Ülesanne toimis hästi nuputamisülesandena. Üldjuhul oli vähim ja suurim arv jadas hästi leitud. Peamine komistuskoht oli seitsmete õigestilugemine. Üldlevinud lahendusviis oli üksikute numbrikohtade asemel arvude saja kaupa grupeerimine ning lõpus kokkuliitmine.

3. Ülesanne osutus võrdlemisi raskeks. Esines palju katse-eksituse meetodil saadud tulemusi ning nurga malliga mõõtmisi. Üldjuhul said sellised tööd üleriigiliselt žüriilt 0 punkti, aga kui malliga mõõdetud nurga puhul oli lõigu KL pikkus korrektselt näidatud, siis sai töö selle osa eest punktid kätte.

4. Ülesanne osutus vägagi jõukohaseks. Enamik õpilasi taipasid, et järjest ringe tehes suurenevad kirjutatud arvud 9 võrra. Enamik õpilasi valisid konkreetse 9-ga jaguva alguspunkti (kas 2016 või 2025) ning uurisid, kas 2024 tekib kuhugi. Peamine komistuskoht oli ainult ühe arvu ning ringi proovimine. Kui teha ring 2016 → 2025, ei leia lahendaja ühtegi vastust. Kui aga alustada 2025 juurest, siis lahendaja leiab küll mõlemad vastused, kuid on siiski tarvis näidata, et arvust 2016 alustamisel ei leidu veel lahendeid. Üldjuhul said sellised lahendused üleriigiliselt žüriilt 6 punkti.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **8. klass**

Kontrollijate kommentaarid

1. Ülesannet lahendati eeldatud võrrandisüsteemi asemel väga suurel määral hoopis läbiproovimismeetodil. Vastavate lahenduste hindamiseks kasutati järgnevat hindamisskeemi.

- Pakutud korrektne läbivaadatavate juhtude arvu kitsendav väide: 1 p
- Teostatud juhtude läbivaatused, vajadusel koos põhjendatud lisakitsendustega, välistamaks ebasobivad juhud: 4 p
- Põhjendatud, et poes kulutas ema 48 eurot: 2 p

Paralleeli tõmbamiseks tõlgendati ametliku hindamisskeemi ridu 3 ja 4 lahendi ühesuse näitamise nõudmisena, ridu 1 ja 2 aga selle eeltööna.

Läbiproovimismeetodites oli tihtipeale suur hulk tööd ja juhtude läbivaatusi tegemata jäetud või oli võimalikele juhtude hulgale tehtud põhjendamata ja/või ebakorrektseid kitsendusi. Suurusjärgus 15 erineva summa või algse raha suurusjärgus 30 võimaliku jaotuse tõestuseta läbivaatamisi ei lugenud üleriigiline žürii põhjendatud lahenduse sammuks.

Väga paljudes töödes oli lahenduse ühesus näitamata, piirdutud oli vaid ühe lahendi leidmise või pakkumisega.

2. Väga paljud lahendajad olid joonise põhjal korrektselt oletanud, et kolmnurk ACD on võrdkülgne, kuid see väide vajab omakorda tõestust. Sageli oli selle põhjal lihtsalt arvutatud a-osas küsitud nurkade suurused; mõnikord oli selle oletuse põhjal arvutatud ka rohkemate nurkade suuruseid. Kuna aga lahendi ühesus ei ole triviaalne, siis korraliku tõestuseta vastavad lahendused üleriigiliselt žüriilt täispunkte ei saanud.

3. Suurem osa täispunkte saanud lahendusi ei koostanud žürii lahendustele omaselt lineaarvõrrandeid, vaid oletasid nii vahepealse kohtumispunkti kui ka lõppvastuse jaoks, mis võiks olla õige vastus, ja näitasid, et see sobib lahendiks. See lähenemine viib antud juhul sihile ainult seetõttu, et lahendeid on täpselt üks ja vastused on lihtsasti leitavad täisarvud. Kuna antud hetkel oli tegemist füüsikalise sisuga ülesandega, mille puhul on lahendi ühesus mingil määral eeldatav, siis sai õpimotivatsiooni silmas pidades piirkondlike parandajate eeskujul kõiki vastavaid lahendusi lõpuks hinnatud väga leebelt. Tuleb aga meeles pidada, et vastused ja vahetulemused (ei aja ega vahemaa osas) ei pruugi iga kord olla täisarvulised. Sellistel puhkudel on palju keerulisem õigeid arve lihtsalt proovimise teel leida ning täispunktid oleksid siis saanud vaid lahendused, mis järgisid žürii lahendustega sarnaseid mõttekäike. Graafikuga lahendatud ülesanded, kus puudus tekstipõhine kontroll lahendi sobivuse kohta, kaotasid ülehindamisel punkti, kuna lõikepunktide koordinaatide täpsus võib üldjuhul olla veelgi madalam.

4. Peamiseks komistuskiviks osutus väga paljudes muidu korrektse lahendusega töödes (korrektne) tõestus, et tõepoolest igale vastuseks märgitud ruudule on võimalik jõuda (st vastuseks oli tegelikult antud ruutude arvu ülempiir).

   Väga paljud lahendajad olid märkinud, et jääke lisades tekib muster, kus iga 6 käigu tagant lisatakse väärtusele arv 15. Paraku oli paljudel juhtudel selle mustri tekkimine põhjendamata (mustri märkamine annab alust tõestust üritada ega ole ise tõestus).

   Et ülesande lahendus on paaris- ja paarituarvulise käikude arvu puhul sarnane, andis üleriigiline žürii punkte ka vale käikude arvu leidmise järel tehtud korrektsete sammude eest.

   Hindamisskeemi real 4 (ja analoogselt ka järgnevatel ridadel) arvestas üleriigiline žürii ka teisi malelaua värvimisega võrdväärseid konstruktsioone ja invariante, näiteks vähima sammude arvu (nn Manhattani kauguse) paarsust.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2024 Piirkonnavoor **9. klass**

Kontrollijate kommentaarid

1. Paljud õpilased leidsid õigesti sobivad sokkide jaotused pesumasinatesse. Näiteks 1 roheliste sokkide paar esimeses masinas ja 3 mõlemas ülejäänus. Kuid peamine viga, mis tehti, oli see, et ei pandud tähele, et võimalused, kus 1 roheliste sokkide paar on esimeses, teises või kolmandas masinas, on üksteisest erinevad. Seetõttu jäi vastus kolmega korrutamata. Selle eest kaotas töö 1 punkti.

Samuti oli mitmetes töödes kehvasti välja toodud piirid mille vahel punaste (või roheliste) sokkide paaride arvud tuleb läbi vaadata. Enamasti kaotasid sellised tööd 1 punkti.

2. Erinevate lahendusviiside tasakaalustamiseks ja hindamise ühtlustamiseks kasutati žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude hindamiseks ametliku skeemi järgmist modifikatsiooni.

- Avaldatud nurga ABD (või ACE) suurus nurga BAC suuruse kaudu: 1 p
- Avaldatud võrdhaarse kolmnurga ABD (vastavalt ACE) alusnurga suurus nurga BAC suuruse kaudu: 1 p
- Avaldatud nurga CAD (vastavalt BAE) suurus nurga BAC suuruse kaudu: 1 p
- Sarnaselt tuletatud nurga BAE (vastavalt CAD) suurus või sümmeetria põhjal väidetud, et $\angle BAE = \angle CAD$: 2 p
- Avaldatud $\angle DAE = \angle DAC + \angle CAB + \angle BAE$: 1 p
- Arvutatud $\angle DAE = 90^\circ$: 1 p

Ühegi õpilase punktid ei kahanenud selle modifikatsiooni tõttu.

Žürii lahendustega 2 ja 3 sarnaste mõttekäikude korral lahenduse allpool märgiud osade eest antud punktid liideti.

- Avaldatud $\angle DAE = 90^\circ + \beta - \gamma$ või $\angle DAE = 90^\circ + \gamma - \beta$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Avaldatud $\angle DAE$ summana $\angle DAB + \angle BAE$ või summana $\angle DAC + \angle CAE$: *1 p*
- Näidatud, et $\beta = \gamma$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Avaldatud nurga ABD (või ACE) suurus nurga BAC suuruse kaudu: *1 p*

  - Järeldatud, et $\angle ABD = \angle ACE$: *1 p*
  - Järeldatud, et võrdhaarsete kolmnurkade ABD ja ACE alusnurgad on võrdse suurusega: *1 p*
- Arvutatud $\angle DAE = 90^\circ$: 1 p

Ülesandel leidus tohutu hulk lahenduse variatsioone lisaks žürii lahendustele, mistõttu oli selle ülesande hindamine keeruline ja vaevarikas. Mõned lahendused sisaldasid mitu lehekülge nurkade arvutusi. Seetõttu ka piirkondades ei suudetud mõnikord eristada toimivaid ja mittetoimivaid lahenduskäike.

Osad lahendajad mõõtsid vastuse jooniselt või lahendasid ülesannet mõnel lihtsalt erijuhul (näiteks võrdkülgse kolmnurga jaoks). Kuigi õige vastuse hüpoteesi püstitamiseks sellised meetodid sobivad, peaks olema selge, et tegemist ei saa olla mingil juhul korraliku lahendusega, sest vastus vajab tõestamist iga võimaliku kolmnurga jaoks. Oli väga üllatav, et mõnes piirkonnas hinnati selliseid lahendusviise täispunkte väärilisteks.

3. Ülesanne oli väga hästi tehtud, peaaegu kõik üleriigilisele žüriile saadetud tööd said maksimumpunktid. Peamised vead olid kas kuskil väikesed arvutusvead või oli kuidagi aetud segamini basseini täitmise aeg ja kiirus.

4. Tegemist oli ootuspäraselt komplekti kõige raskema, kuid tugevamatele siiski jõukohase ülesandega.

Tahaks panna lahendajate südamele, et lahenduste kõik sammud tuleb alati korralikult selgitada. Tüüpilised kohad, kus kaotati punkte, olid sellised:

- Kirjutati vaid, et esimeste arvude hulgas sobivad $n = 1$ ja $n = 3$ ilma kontrollita, miks $n = 1$ ja $n = 3$ sobivad ja $n = 2$ mitte.
- Kirjutati, et $n > 4$ korral lõpeb summa alati 3-ga, kuid ei seletatud miks.
- Kirjutati, et täisarvu ruut ei saa lõppeda 3-ga, kuid seda väidet kuidagi ei selgitatud.

Isegi kui lahendaja enda jaoks on need sammud selged, siis kontrollija ei suuda lugeda lahendaja mõtteid, et veenduda, kas lahendaja ikka päriselt arvutas kõike õigesti ja oleks osanud neid väiteid põhjendada. Ülevaatamisel võeti nende puudujääkide korral punkte maha, piirkondades suhtuti üldjuhul leebemalt.

Mõned lahendused üritasid viimase numbri asemel uurida jaguvust. Ühestki lahendusviisist, mis kasutaks jaguvust, ei ole žürii teadlik.

Ootamatult palju raskusi oli õpilastel teksti mõistmisega. Osadele tekitas faktoriaali definitsioon segadust, kuid veel rohkem oli raskusi esimese n positiivse täisarvu faktoriaalide summa mõistmisega. Oli lahendajaid, kes arvasid, et lihtsalt arvu n faktoriaal peab olema täisruut, oli selliseid, kes arvasid, et kahe järjestikuse arvu faktoriaali summa peab olema täisruut, oli ka selliseid, kes arvasid et n esimese arvu seast võib ise valida, milliste arvude faktoriaale liita saab.