Lahtine võistlus 2023 talv

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Artur Avameri
Aleksei Ganyukov
Urve Kangro
Oleg Košik
Richard Luhtaru
Härmel Nestra
Erik Paemurru
Sandra Schumann
Birgit Veldi
Hendrik Vija

Matemaatika lahtine võistlus

9. detsember 2023 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia vähim nuppude arv, mida on võimalik asetada 4×4 ruudustiku ruutudele nii, et ükski kaks nuppu ei asu samal ruudul ega ühist külge omavatel ruutudel (diagonaalis ühist tippu omavatel ruutudel võivad nupud olla) ning ühtegi nuppu ei saa samadel tingimustel ruudustikule lisada.

2. Juku korrutab omavahel neli järjestikust positiivset täisarvu ja jagab saadud korrutise neljaga. Leia kõik võimalused, millise numbriga saab see jagatis lõppeda.

3. Nimetame arvu *huvitavaks*, kui ta esitub kolme erineva mittenegatiivse täisarvu ruutude summana. Näiteks arv 5 on huvitav, sest $5 = 0^2+1^2+2^2$. Nimetame arvu *eriliseks*, kui ta ei ole huvitav, kuid esitub kahe erineva huvitava arvu korrutisena.

a) Leia üks eriline arv.

b) Tõesta, et erilisi arve on lõpmata palju.

4. Leia kõik naturaalarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y - z = 23, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 23. \end{cases}$$

5. Kolmnurga ABC mediaanil AD valitakse punkt X. Kolmnurga ABX ümberringjoon lõikab kolmnurga ABC mediaani BE punktis Y ($Y \neq B$). Kolmnurga EXY ümberringjoon lõikab sirget DE punktis K ($K \neq E$). Tõesta, et punkti K asukoht ei sõltu punkti X valikust.

6. Juku ja Miku mängivad järgmist mängu. Algul on tahvlil mingi positiivne täisarv. Igal käigul lahutab kumbki mängija parajasti tahvlil olevast arvust mingi nullist erineva numbri, mis esineb tema või tema vastase isikukoodis, ja asendab tahvlil oleva arvu selle tehte tulemusega. Käiakse kordamööda, alustab Juku. Mängija, kelle käigu tulemusel tekib tahvlile negatiivne arv, on kaotanud. Tõesta, et mistahes 10 järjestikuse positiivse täisarvu seas leidub selline arv n, et kui algselt on tahvlil arv n, siis Jukul on võimalik mäng võita vastase iga vastumängu korral.

Märkus. Isikukood on teatav lõplik numbrijärjend. Iga kahe inimese isikukoodid on erinevad, kuid neis on ühepalju numbreid.

Matemaatika lahtine võistlus

9. detsember 2023 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Tähistame suvaliste positiivsete reaalarvude x ja y korral kirjutisega $\sqrt[x]{y}$ positiivset reaalarvu z, mille korral $z^x = y$. Tähistame veel $\sqrt{y} = \sqrt[2]{y}$.

Kas arv $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$ on suurem, väiksem või niisama suur kui arv $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$?

2. Ütleme, et positiivne täisarv n on *ülipaaris*, kui arvu n suurim paaritu tegur on väiksem kui arvu n ja tema suurima paaritu teguri jagatis. Kui palju leidub ülipaaris positiivseid täisarve, mis on väiksemad kui 1000?

3. Anu ja Bert mängivad kumbki ChatGPT-ga järgmist mängu. Anu ja ChatGPT mängus on algul tahvlil arv 2023!, Berdi ja ChatGPT mängus arv 2024!. Iga käik koosneb kahest osast. Kõigepealt valib üks mängija tahvlil oleva arvu kordarvulise teguri d ja jagab arvu sellega läbi. Seejärel peab vastane tegema omal valikul ühte järgmisest kolmest tegevusest:

1) korrutada tahvlil olevat arvu arvu d teguriga d', mille korral $1 < d' < d$;
2) korrutada tahvlil olevat arvu 7-ga;
3) eemaldada tahvlil oleva arvu lõpust null ja tulemus korrutada 2023-ga (kui arv ei lõpe nulliga, siis seda varianti valida ei saa).

Järgmise käigu ajal vahetavad mängijad osad. Nii jätkatakse kordamööda ning mängija, kes ei saa nõuetekohast toimingut sooritada, on kaotanud. ChatGPT alustab mõlemat mängu. Tõesta, et ChatGPT-l on võimalik vähemalt üks mängudest võita.

Märkus. Kirjutis $n!$ märgib kõigi positiivsete täisarvude $1, 2, \ldots, n$ korrutist.

4. Leia kõik funktsioonid $f(x)$, mis on määratud kõigil 1-st erinevatel reaalarvudel, omandavad ainult 0-st erinevaid reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad tingimusi $f(0) = 1$ ja $f(f(xy)) = 1 - \dfrac{1}{yf(f(f(x)))}$ alati, kui $xy \neq 0$, $xy \neq 1$ ja $x \neq 1$.

5. Kolmnurga ABC külgedel CA ja AB valitakse vastavalt punktid E ja F. Sirged BE ja CF lõikuvad punktis P. Olgu Q selline punkt, et $PBQC$ on rööpkülik, ja R selline punkt, et $AERF$ on rööpkülik. Tõesta, et $PR \parallel AQ$.

6. Leia vähim nuppude arv, mida on võimalik asetada 5×5 ruudustiku ruutudele nii, et ükski kaks nuppu ei asu samal ruudul ega ühist külge omavatel ruutudel (diagonaalis ühist tippu omavatel ruutudel võivad nupud olla) ning ühtegi nuppu ei saa samadel tingimustel ruudustikule lisada.

Открытое соревнование по математике

9 декабря 2023 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти наименьшее количество фишек, которые возможно расположить на клетках клетчатого поля 4×4 так, чтобы никакие две фишки не лежали на одной и той же клетке или клетках, имеющих общую сторону (клетки фишек могут иметь общую вершину), и ни одна фишка не могла быть добавлена на поле при тех же условиях.

2. Юля перемножила между собой четыре последовательных положительных целых числа и поделила полученное произведение на четыре. Найти все возможности, на какую цифру может оканчиваться это частное.

3. Назовем число *интересным*, если оно представимо в виде суммы квадратов трёх различных неотрицательных целых чисел. Например, число 5 — интересное, поскольку $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$. Назовем число *необычным*, если оно не является интересным, но представимо в виде произведения двух различных интересных чисел.

а) Найти одно необычное число.

б) Доказать, что найдется бесконечно много необычных чисел.

4. Найти все тройки натуральных чисел (x, y, z), удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + y - z = 23, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 23. \end{cases}$$

5. На медиане AD треугольника ABC выбрана точка X. Описанная окружность треугольника ABX пересекает медиану BE треугольника ABC в точке $Y \neq B$. Описанная окружность треугольника EXY пересекает прямую DE в точке $K \neq E$. Доказать, что положение точки K не зависит от выбора точки X.

6. Юра и Маша играют в следующую игру. В начальный момент на доске написано положительное целое число. На каждом ходу игрок вычитает из находящегося в данный момент на доске числа отличную от нуля цифру, содержащуюся в его личном коде или личном коде соперника, и заменяет находящееся на доске число полученным результатом. Ходят по очереди, начинает Юра. Игрок, после хода которого на доске появляется отрицательное число, проигрывает. Доказать, что среди любых 10 последовательных положительных целых чисел найдется такое число n, что если в начальный момент на доске написано число n, то у Юры есть возможность выиграть игру при любой контригре соперника.

Примечание. Личный код (isikukood) — некоторая определенная последовательность цифр. У каждых двух людей личные кода отличаются, но они состоят из одинакового количества цифр.

Открытое соревнование по математике

9 декабря 2023 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Для положительных действительных чисел x, y обозначим за $\sqrt[x]{y}$ положительное число z, для которого $z^x = y$. Обозначим также $\sqrt{y} = \sqrt[2]{y}$. Является ли число $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$ больше, меньше или равным числу $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$?

2. Назовём число n *гиперчётным*, если наибольший нечетный делитель числа n меньше частного от деления n на этот нечётный делитель. Сколько найдется гиперчётных положительных целых чисел, меньших 1000?

3. Аня и Боря играют в следующую игру с ChatGPT. В начале игры между Аней и ChatGPT на доске число 2023!, между Борей и ChatGPT — число 2024!. Каждый ход состоит из двух частей. Сначала один игрок выбирает составной делитель d написанного на доске числа n и делит n на d. Затем второй игрок совершает любое из следующих действий:

1) умножить написанное на доске число на делитель d' числа d, где $1 < d' < d$;
2) умножить написанное на доске число на 7;
3) стереть с конца написанного на доске числа 0 и результат умножить на 2023 (это действие выбрать нельзя если число не заканчивается на 0).

На следующем ходу игроки меняются частями. Игра ведется по очереди и игрок, который не сможет совершить действие, проигрывает. ChatGPT начинает обе игры. Доказать, что ChatGPT может выиграть хотя бы одну из этих игр.

Примечание. Запись $n!$ обозначает произведение всех положительных целых чисел $1, 2, \ldots, n$.

4. Найти все функции $f(x)$, определенные для всех отличных от 1 действительных чисел, принимающие только отличные от 0 действительные значения и удовлетворяющие условиям $f(0) = 1$ и $f(f(xy)) = 1 - \dfrac{1}{yf(f(f(x)))}$ для всех действительных чисел x, y, для которых $xy \neq 0$, $xy \neq 1$ и $x \neq 1$.

5. На сторонах AC и AB треугольника ABC выбираются точки E и F. Прямые BE и CF пересекаются в точке P. Пусть Q и R — такие точки, что четырёхугольники $PBQC$ и $AERF$ являются параллелограммами. Доказать, что $PR \parallel AQ$.

6. Найти наименьшее количество фишек, которые возможно расположить на клетках клетчатого поля 5×5 так, чтобы никакие две фишки не лежали на одной и той же клетке или клетках, имеющих общую сторону (клетки фишек могут иметь общую вершину), и ни одна фишка не могла быть добавлена на поле при тех же условиях.

Open Contest in Mathematics

December 9, 2023 **Juniors**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Find the smallest number of buttons that can be placed on the squares of the 4×4 grid in such a way that no two buttons are on the same square or on squares with a common side (there may be buttons on squares with a common vertex) and no buttons can be added to the grid under the same conditions.

2. Johnny multiplied four consecutive positive integers and divided the result by four. Find all the possibilities for the digit in which this quotient can end.

3. Call a number *interesting* if it can be represented as the sum of squares of three distinct non-negative integers. For example, the number 5 is interesting, because $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$. Call a number *special* if it is not interesting, but can be represented as the product of two distinct interesting numbers.

a) Find one special number.

b) Prove that there are infinitely many special numbers.

4. Find all triples of natural numbers (x, y, z) satisfying the system of equations

$$\begin{cases} x + y - z = 23, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 23. \end{cases}$$

5. A point X is chosen on the median AD of triangle ABC. The circumcircle of triangle ABX intersects the median BE of triangle ABC at point $Y \neq B$. The circumcircle of triangle EXY intersects the line DE at point $K \neq E$. Prove that the position of K does not depend on the choice of X.

6. Johnny and Mickey are playing the following game. In the beginning, there is a positive integer on the board. Each turn, a player subtracts from the number on the board a non-zero digit that appears in his or his opponent's ID code, and replaces the number on the board with the result. Players take turns, Johnny starts. The player whose move ends up in a negative number on the board loses. Prove that, among any 10 consecutive positive integers, there is a number n such that, if initially the number n is on the board, then Johnny can win the game regardless of his opponent's counterplay.

Note: An identity code is a certain finite sequence of digits. Each two people have distinct ID codes, but they are made up of the same number of digits.

Lahendused

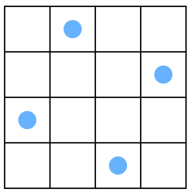
1. *(Richard Luhtaru)*

Leia vähim nuppude arv, mida on võimalik asetada 4×4 ruudustiku ruutudele nii, et ükski kaks nuppu ei asu samal ruudul ega ühist külge omavatel ruutudel (diagonaalis ühist tippu omavatel ruutudel võivad nupud olla) ning ühtegi nuppu ei saa samadel tingimustel ruudustikule lisada.

Vastus: 4.

Lahendus 1. Kui ruudustikul on kuni 3 nuppu, siis on alati võimalik sinna nuppe juurde lisada. Tõepoolest, iga nupp takistab uute nuppude lisamist kuni 5 ruudule: need on ruut, millel vaadeldav nupp asub, ja kuni 4 ruutu, mis omavad selle ruuduga ühist külge. Seega kuni 3 nuppu „katavad“ kokku kuni 15 ruutu, kuid ruudustikul on kokku $4 \cdot 4$ ehk 16 ruutu. Seega vähemalt ühele ruudule saab nupu lisada.

Jääb märgata, et paigutades ruudustikule 4 nuppu nii, nagu näidatud joonisel 1, pole ruudustikule võimalik ühtegi nuppu lisada.



Joonis 1

Lahendus 2. Ütleme, et nupp *katab* ruutu, kui nupp asub kas sel ruudul või temaga ühist külge omaval ruudul. Paneme tähele, et iga nupp katab ülimalt üht nurgaruutu. Kuna nurgaruute on 4, siis vähem kui 4 nupu korral on alati võimalik vähemalt ühele nurgaruudule asetada lisanupp. Seda, et 4 nuppu on võimalik paigutada nii, et rohkem nuppe lisada ei saa, näitame nagu lahenduses 1.

2. *(Urve Kangro, Härmel Nestra)*

Juku korrutab omavahel neli järjestikust positiivset täisarvu ja jagab saadud korrutise neljaga. Leia kõik võimalused, millise numbriga saab see jagatis lõppeda.

Vastus: 0, 6.

Lahendus 1. Nelja järjestikuse täisarvu seas leidub kindlasti 4-ga jaguv arv ja peale selle veel üks paarisarv. Tegur 2 selles paarisarvus jääb pärast jagamist 4-ga alles. Seega Juku saadud jagatis on paarisarv. Järelikult paaritud lõpunumbrid pole võimalikud.

Kui 4-ga jagamisel saadud arvu viimane number on 0, 2, 4, 6 või 8, siis jagatava lõpus on vastavalt 0, 8, 6, 4 või 2. Uurime, millised nende hulgast saavad esineda nelja järjestikuse positiivse täisarvu korrutise viimase numbrina.

- Kui neli järjestikust positiivset täisarvu lõpevad numbritega 1, 2, 3 ja 4, siis korrutise viimane number on 4.
- Kui neli järjestikust positiivset täisarvu lõpevad numbritega 6, 7, 8 ja 9, siis korrutise viimane number on samuti 4.
- Ülejäänud juhtudel on nelja järjestikuse positiivse täisarvu seas selline, mis lõpeb numbriga 5 või 0, mistõttu korrutis jagub 5-ga. Arvestades, et korrutis on paaris, saab tema viimane number olla vaid 0.

Kokkuvõttes näeme, et nelja järjestikuse täisarvu korrutise viimane number saab olla 4 või 0. Eelnevat arvestades on selle korrutise jagamisel 4-ga saadud arvu viimane number vastavalt 6 või 0.

Lahendus 2. Nelja järjestikuse täisarvu korrutis jagub kindlasti 8-ga, sest tegurite seas on kaks järjestikust paarisarvu ja neist üks peab jaguma 4-ga. Vaatame kahte juhtu.

- Kui üks neljast tegurist jagub 5-ga, siis jagub korrutis ka 5-ga. Kokkuvõttes jagub siis korrutis 40-ga, mis näitab, et neljaga jagamisel saadud tulemus jagub 10-ga. Selline arv lõpeb numbriga 0.
- Kui ükski neljast tegurist ei jagu 5-ga, siis on tegurid kujul $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$ ja $5n+4$. Sulgude avamisel korrutises $(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)$ aga saame avaldise kujul $5m + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ mingi m jaoks. Ka $5m$ peab jaguma 8-ga, sest kogu summa ja liidetav $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ jaguvad 8-ga. Kuna $\text{SÜT}(5,8) = 1$, siis peab ka m jaguma 8-ga; olgu $m = 8k$. Siis korrutis avaldub kujul $40k + 24$, millest neljaga jagamisel saame $10k + 6$. Selle arvu viimane number on 6.

3. *(Artur Avameri, Oleg Košik)*

Nimetame arvu *huvitavaks*, kui ta esitub kolme erineva mittenegatiivse täisarvu ruutude summana. Näiteks arv 5 on huvitav, sest $5 = 0^2+1^2+2^2$. Nimetame arvu *eriliseks*, kui ta ei ole huvitav, kuid esitub kahe erineva huvitava arvu korrutisena.

a) Leia üks eriline arv.

b) Tõesta, et erilisi arve on lõpmata palju.

Vastus: a) vähim näide on 175; üldiselt sobivad kõik korrutised ab, kus a on kolme erineva paaritu arvu ruutude summa ning b on ühe 4-ga jaguva arvu, ühe 2-ga, kuid mitte 4-ga jaguva arvu ja ühe paaritu arvu ruutude summa.

Lahendus. Paaritu arvu ruut annab 8-ga jagamisel jäägi 1, mida näitavad võrdused $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$, kus $4k(k+1)$ jagub 8-ga, sest teguritest k ja $k+1$ üks on paaris. Kui paarisarv jagub 4-ga, siis tema ruut jagub 8-ga ehk annab 8-ga jagamisel jäägi 0. Kui paarisarv annab 4-ga jagamisel jäägi 2, siis tema ruut annab 8-ga jagamisel jäägi 4, sest $(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + k) + 4$. Seega täisarvude ruudud saavad 8-ga jagamisel anda jääke 0, 1, 4 ja ainult neid.

Eelneva põhjal annab kolme paaritu arvu ruutude summa 8-ga jagamisel jäägi 3. Ühe paaritu arvu, ühe 4-ga jaguva paarisarvu ja ühe 4-ga mitte jaguva paarisarvu ruutude summa aga annab 8-ga jagamisel jäägi 5. Seega saab konstrueerida lõpmata palju nii huvitavaid arve, mis annavad 8-ga jagamisel jäägi 3, kui ka huvitavaid arve, mis annavad 8-ga jagamisel jäägi 5. Kui aga korrutada omavahel arvud, mis annavad 8-ga jagamisel jäägi 3 ja 5, on tulemuseks arv, mis annab 8-ga jagamisel jäägi 7, sest $(8k+3)(8l+5) = 64kl + 40k + 24l + 15 = 8(8kl + 5k + 3l + 1) + 7$. Jääki 7 aga pole võimalik saada summana kolmest liidetavast, millest igaüks on 0, 1 või 4. Seega niisugused korrutised ei ole huvitavad. Järelikult leidub lõpmata palju erilisi arve.

Näite leidmiseks võib huvitavateks arvudeks valida $1^2+3^2+5^2$ ja $0^1+1^2+2^2$, mille korrutis on $35 \cdot 5$ ehk 175.

4. *(Urve Kangro)*

Leia kõik naturaalarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y - z = 23, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 23. \end{cases}$$

Vastus: $(24, 276, 277)$, $(34, 46, 57)$, $(46, 34, 57)$ ja $(276, 24, 277)$.

Lahendus 1. Esimesest võrrandist saame $z = x+y-23$. Asendades selle teise võrrandisse, saame

$$x^2 + y^2 - (x+y-23)^2 = 23.$$

Avades siin sulud ning viies muutujatega liikmed vasakule ja muutujateta liikmed paremale, saame pärast sarnaste liikmete koondamist võrrandi $-2xy + 46x + 46y = 23 \cdot 24$, mis poolte jagamisel arvuga -2 annab

$$xy - 23x - 23y = -23 \cdot 12.$$

Liites mõlemale poole $23 \cdot 23$, saame pärast tegurdamist samaväärse võrrandi

$$(x-23)(y-23) = 23 \cdot 11.$$

Kuna 23 ja 11 on algarvud, siis parema poole ainsad positiivsed tegurid on 1, 11, 23 ja $11 \cdot 23$. Seega $x = 23+1 = 24$ või $x = 23+11 = 34$ või $x = 23+23 = 46$ või $x = 12 \cdot 23 = 276$; vastavad y väärtused on $276, 46, 34, 24$ ja z väärtused on $277, 57, 57, 277$. Arvu $23 \cdot 11$ negatiivsed tegurid lahendeid ei anna, kuna siis tuleks $x + y < 23$ ja z seega negatiivne.

Lahendus 2. Esimesest võrrandist saame $x = 23 - y + z$. Asendades selle teise võrrandisse, saame

$$(23 - y + z)^2 + y^2 - z^2 = 23.$$

Avades siin sulud ning viies muutujatega liikmed vasakule ja muutujateta liikmed paremale, saame pärast sarnaste liikmete koondamist võrrandi $2y^2 - 46y + 46z - 2yz = -23 \cdot 22$, mis poolte jagamisel arvuga -2 annab

$$yz + 23y - 23z - y^2 = 23 \cdot 11.$$

Tegurdades vasakul, saame samaväärse võrrandi

$$(z - y)(y - 23) = 23 \cdot 11.$$

Kuna 23 ja 11 on algarvud, siis parema poole ainsad positiivsed tegurid on 1, 11, 23 ja $11 \cdot 23$. Seega $y = 23+1 = 24$ või $y = 23+11 = 34$ või $y = 23+23 = 46$ või $y = 12 \cdot 23 = 276$; vastavad z väärtused on $277, 57, 57, 277$ ning x väärtused on $276, 46, 34, 24$. Arvu $23 \cdot 11$ negatiivsed tegurid lahendeid ei anna, kuna siis tuleks $z - 23 = (z - y) + (y - 23) < -23$, sest $z - y \leqslant -23$ või $y - 23 \leqslant -23$. See aga tähendaks, et z peaks olema negatiivne.

Lahendus 3. Asendame esimesest võrrandist $z = x + y - 23$ teise võrrandisse; lihtsustades nagu lahenduses 1, saame

$$xy = 23x + 23y - 23 \cdot 12. \tag{1}$$

Võrrandi (1) parem pool jagub 23-ga, sest kõik liidetavad jaguvad 23-ga. Järelikult ka vasak pool xy jagub 23-ga. Kuna 23 on algarv, siis kas x või y jagub 23-ga. Olgu $x = 23k$ (kui y jagub 23-ga, siis võime lihtsalt x ja y ära vahetada). Asendades $x = 23k$ võrrandisse (1) ning jagades pooled 23-ga, saame $ky = 23k + y - 12$, kust

$$k = \frac{y - 12}{y - 23} = 1 + \frac{11}{y - 23}.$$

Kuna 11 on algarv, viimane murd peab olema täisarv ja $k > 0$, siis on kaks võimalust:

- kui $y - 23 = 11$, siis $k - 1 = 1$, kust saame $y = 34$, $x = 46$ ja $z = 57$;
- kui $y - 23 = 1$, siis $k - 1 = 11$, kust saame $y = 24$, $x = 276$ ja $z = 277$.

Lisaks tekivad lahendid, kus x ja y on vahetatud.

Lahendus 4. Kirjutame esimese võrrandi kujul $x+y=z+23$, tõstame selle pooled ruutu ja lahutame teise võrrandi. Saame

$$2xy = 46z + 23^2 - 23. \tag{2}$$

Võrrandi (2) parem pool jagub 23-ga, sest kõik liidetavad jaguvad 23-ga. Järelikult ka vasak pool $2xy$ jagub 23-ga. Kuna 23 on algarv, siis kas x või y jagub 23-ga. Olgu $x = 23k$ (kui y jagub 23-ga, siis võime lihtsalt x ja y ära vahetada); siis võrrandisse (2) asendamisel ja poolte jagamisel 46-ga saame $ky = z+11$. Asendades nüüd $x = 23k$ ja $z = ky-11$ antud süsteemi esimesse võrrandisse, saame $23k+y-ky+11 = 23$, mis on samaväärne võrrandiga

$$(k-1)(y-23) = 11.$$

Kuna 11 on algarv, siis on kaks võimalust:

- kui $k-1 = 1$ ja $y-23 = 11$, siis $y = 34$, $x = 46$ ja $z = 57$;
- kui $k-1 = 11$ ja $y-23 = 1$, siis $y = 24$, $x = 276$ ja $z = 277$.

Lisaks tekivad lahendid, kus x ja y on vahetatud.

Lahendus 5. Tõstame esimese võrrandi pooled ruutu ja lahutame teise võrrandi. Saame

$$2z^2 + 2xy - 2xz - 2yz = 23^2 - 23.$$

Pärast poolte jagamist 2-ga ja tegurdamist saame

$$(z-x)(z-y) = 253 = 11 \cdot 23.$$

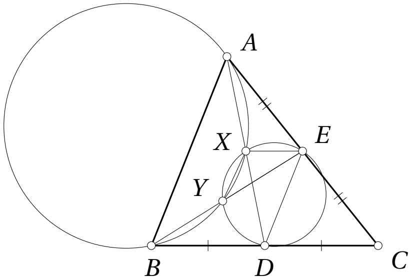
Olgu $253 = pq$ ning $z-x = p$, $z-y = q$. Asendades siit $x = z-p$ ja $y = z-q$ antud süsteemi esimesse võrrandisse, saame $z-p-q = 23$. Paneme tähele, et kui $p < 0$ ja $q < 0$, siis z tuleks negatiivne. Seega $p = 1$, $p = 11$, $p = 23$ või $p = 253$ ning vastavalt $q = 253$, $q = 23$, $q = 11$ või $q = 1$ ja lahendid on kujul $x = 23+q$, $y = 23+p$, $z = 23+p+q$. Asendades järgemööda kõik neli varianti, saame vastuses loetletud lahendid.

5. *(Aleksei Ganyukov)*

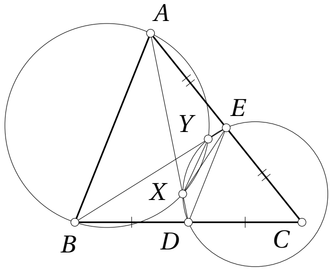
Kolmnurga ABC mediaanil AD valitakse punkt X. Kolmnurga ABX ümberringjoon lõikab kolmnurga ABC mediaani BE punktis Y ($Y \neq B$). Kolmnurga EXY ümberringjoon lõikab sirget DE punktis K ($K \neq E$). Tõesta, et punkti K asukoht ei sõltu punkti X valikust.

Lahendus. Kuna DE on kolmnurga ABC kesklõik, siis $DE \parallel AB$. Vaatame algul juhtu, kus punktid A, X, Y, B asuvad ringjoonel selles järjestuses (joonis 2). Kasutades põiknurkade ja kõõlnelinurga $AXYB$ omadust, saame

$$\angle DEY = \angle DEB = \angle ABE = \angle ABY = 180^\circ - \angle AXY = \angle DXY.$$



Joonis 2



Joonis 3

Järelikult punktid D, E, X, Y asuvad ühel ringjoonel. Kui aga punktid A, Y, X, B asuvad ringjoonel selles järjestuses (joonis 3), siis saame analoogiliselt

$$\angle DEY = \angle DEB = \angle ABE = \angle ABY = \angle AXY = 180^\circ - \angle DXY.$$

Järelikult jällegi asuvad punktid D, E, X, Y ühel ringjoonel. Kokkuvõttes oleme näidanud, et kolmnurga EXY ümberringjoon läbib punkti D. Seega kolmnurga EXY ümberringjoon lõikab sirget DE punktis D ehk $K = D$. Sellest tulenevalt ei sõltu punkti K asukoht punkti X valikust, vaid K on alati külje BC keskpunkt.

6. *(Härmel Nestra)*

Juku ja Miku mängivad järgmist mängu. Algul on tahvlil mingi positiivne täisarv. Igal käigul lahutab kumbki mängija parajasti tahvlil olevast arvust mingi nullist erineva numbri, mis esineb tema või tema vastase isikukoodis, ja asendab tahvlil oleva arvu selle tehte tulemusega. Käiakse kordamööda, alustab Juku. Mängija, kelle käigu tulemusel tekib tahvlile negatiivne arv, on kaotanud. Tõesta, et mistahes 10 järjestikuse positiivse täisarvu seas leidub selline arv n, et kui algselt on tahvlil arv n, siis Jukul on võimalik mäng võita vastase iga vastumängu korral.

Märkus. Isikukood on teatav lõplik numbrijärjend. Iga kahe inimese isikukoodid on erinevad, kuid neis on ühepalju numbreid.

Lahendus. Vaatleme suvalist 10 järjestikust positiivset täisarvu; olgu need $a, a+1, \ldots, a+9$. Kui arvude $a, a+1, \ldots, a+8$ seas leidub selline arv n, et kui algul on tahvlil arv n, siis saab Juku võita iga Miku vastumängu korral, siis tõestatav väide kehtib. Oletame nüüd, et arvude $a, a+1, \ldots, a+8$ seas sellist arvu ei leidu. See tähendab, et olukorras, kus tahvlil on mõni arvudest $a, a+1, \ldots, a+8$, ei saa käigul olev mängija võita, kui tema vastane mängib õigesti. Märkame nüüd, et kui alguses on tahvlil arv $a+9$ ja Juku lahutab esimesel käigul ükskõik millise nullist erineva numbri, siis tekib seis, kus tahvlil on üks arvudest $a, a+1, \ldots, a+8$ ja käigul on Miku. Eelneva põhjal Miku võita ei saa, kui Juku mängib õigesti. Seega kui algul on tahvlil arv

$a+9$, siis saab Juku võita Miku iga vastumängu korral (kuna iga kahe inimese isikukoodid on erinevad, kuid neis on ühepalju numbreid, siis nullist erinev number ühes neist kindlasti leidub). Kokkuvõttes kehtib ülesande väide kõikidel juhtudel.

Matemaatika lahtine võistlus

9. detsember 2023 **Vanem rühm**

Lahendused

1. *(Oleg Košik)*

Tähistame suvaliste positiivsete reaalarvude x ja y korral kirjutisega $\sqrt[x]{y}$ positiivset reaalarvu z, mille korral $z^x = y$. Tähistame veel $\sqrt{y} = \sqrt[2]{y}$.

Kas arv $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$ on suurem, väiksem või niisama suur kui arv $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$?

Vastus: niisama suur.

Lahendus. Märkame, et

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2.$$

Juure definitsiooni põhjal seega

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = \sqrt[\sqrt{2}]{2}.$$

Märkus. Tähistus $\sqrt[x]{y}$ defineeritakse matemaatikas ainult juhul, kui x on positiivne täisarv. Selleks, et kasutada juurijana irratsionaalarvu $\sqrt{2}$, oli vaja ülesande püstituses tähistust $\sqrt[x]{y}$ laiendada positiivsetele reaalarvudele.

2. *(Härmel Nestra)*

Ütleme, et positiivne täisarv n on *ülipaaris*, kui arvu n suurim paaritu tegur on väiksem kui arvu n ja tema suurima paaritu teguri jagatis. Kui palju leidub ülipaaris positiivseid täisarve, mis on väiksemad kui 1000?

Vastus: 46.

Lahendus 1. Kui arv d on arvu n suurim paaritu tegur, siis arv $\frac{n}{d}$ ei jagu ühegi paaritu algarvuga. Tõepoolest, kui $\frac{n}{d}$ jaguks paaritu algarvuga p, siis oleks arv pd arvu n paaritu tegur, mis on suurem kui d, ja see oleks vastuolus arvu d valikuga. Seega $\frac{n}{d}$ peab olema 2 aste. Järelikult ülipaaris on need ja ainult need positiivsed täisarvud, mis esituvad mingi 2 astme ja temast väiksema paaritu arvu korrutisena.

Leiame kõik 1000-st väiksemad ülipaaris positiivsed täisarvud nende suurimate paaritute tegurite kaupa.

- Kui suurim paaritu tegur on 1, siis saab ülejääv 2 aste olla üks arvudest 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Kokku 9 võimalust.
- Kui suurim paaritu tegur on 3, siis peab ülejääv 2 aste olema üks arvudest 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Kokku 7 võimalust.
- Kui suurim paaritu tegur on 5 või 7, siis peab ülejääv 2 aste olema üks arvudest 8, 16, 32, 64, 128. Kokku $2 \cdot 5$ ehk 10 võimalust.
- Kui suurim paaritu tegur on 9 või 11 või 13 või 15, siis peab ülejääv 2 aste olema üks arvudest 16, 32, 64. Kokku $4 \cdot 3$ ehk 12 võimalust.
- Lõpuks saab suurim paaritu tegur olla üks arvudest 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, mispuhul ülejääv 2 aste saab olla ainult 32. Kokku 8 võimalust.

Järelikult 1000-st väiksemate ülipaaris positiivsete täisarvude koguarv on $9 + 7 + 10 + 12 + 8$ ehk 46.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 näitame, et ülipaaris on need ja ainult need positiivsed täisarvud, mis esituvad mingi 2 astme ja temast väiksema paaritu arvu korrutisena. Nimetame seda 2 astet ülipaaris positiivse täisarvu *paarisosaks.* Et suurusjärjestuses iga teine arv on paaritu, siis on arvust 2^k väiksemaid paarisarve kokku $\frac{2^k}{2}$ ehk 2^{k-1}. Astendajate $k = 1, 2, 3, 4, 5$ korral saame seega vastavalt $1, 2, 4, 8, 16$ ülipaaris positiivset täisarvu, mille paarisosa on 2^k. Suurim neist on $2^5 \cdot (2^5 - 1)$ ehk $32 \cdot 31$ ehk 992, mis on väiksem kui 1000. Astendajate $6, 7, 8, 9$ korral on suurim paaritu arv, millega korrutades jääb tulemus alla 1000, vastavalt $15, 7, 3, 1$. Seega erinevaid sobivaid paarituid tegureid on vastavalt $8, 4, 2, 1$. Kokkuvõttes on 1000-st väiksemaid ülipaaris positiivseid arve $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ ehk 46.

3. *(Birgit Veldi)*

Anu ja Bert mängivad kumbki ChatGPT-ga järgmist mängu. Anu ja ChatGPT mängus on algul tahvlil arv 2023!, Berdi ja ChatGPT mängus arv 2024!. Iga käik koosneb kahest osast. Kõigepealt valib üks mängija tahvlil oleva arvu kordarvulise teguri d ja jagab arvu sellega läbi. Seejärel peab vastane tegema omal valikul ühte järgmisest kolmest tegevusest:

1) korrutada tahvlil olevat arvu arvu d teguriga d', mille korral $1 < d' < d$;
2) korrutada tahvlil olevat arvu 7-ga;
3) eemaldada tahvlil oleva arvu lõpust null ja tulemus korrutada 2023-ga (kui arv ei lõpe nulliga, siis seda varianti valida ei saa).

Järgmise käigu ajal vahetavad mängijad osad. Nii jätkatakse kordamööda ning mängija, kes ei saa nõuetekohast toimingut sooritada, on kaotanud. ChatGPT alustab mõlemat mängu. Tõesta, et ChatGPT-l on võimalik vähemalt üks mängudest võita.

Märkus. Kirjutis $n!$ märgib kõigi positiivsete täisarvude $1, 2, \ldots, n$ korrutist.

Lahendus. Vaatame astendajate summa paarsust arvu kanoonilises kujus. Kuna $2024! = 2023! \cdot 2024$ ja $2024 = 2^3 \cdot 11^1 \cdot 23^1$, siis on mängude alguses tahvlil olevate arvude kanoonilise esituse astendajate summad 5 võrra erinevad. Järelikult need astendajate summad on erineva paarsusega, millest tulenevalt on üks neist paaris. Näitame, et selle mängu saab ChatGPT kindlalt võita.

ChatGPT valib oma avakäigu esimeses osas mõne teguri, mis on täpselt kahe (mitte tingmata erineva) algteguri korrutis. Peale sellega jagamist on astendajate summa paarsus sama. Ükskõik millise variandi kasuks vastasmängija seejärel otsustab, astendajate summa paarsus muutub: esimese ja teise variandi korral suureneb astendajate summa ühe võrra, kolmanda puhul väheneb kahe võrra (sest $10 = 2^1 \cdot 5^1$) ja siis suureneb kolme võrra (sest $2023 = 7^1 \cdot 17^2$) ehk kokku suureneb ühe võrra. Seega on ChatGPT avakäigu lõpuks paarsus muutunud.

Ükskõik millise teguriga vastasmängija nüüd vahetatud rollides arvu läbi ei jaga, lõpetab ChatGPT käigu esimese variandiga, valides teguri d', mis tekib arvu d jagamisel mõne tema algteguriga. Sel juhul väheneb astendajate summa kokkuvõttes ühe võrra, misõttu on paarsus jälle muutunud ehk astendajate summa on jälle paaris nagu alguses.

Seega saab ChatGPT sama strateegiat jätkata. Nii mängides tagab ChatGPT, et iga tema alustatava käigu alguseks on tahvlil oleva arvu astendajate summa paaris. Kuna kirjeldatud strateegia puhul väheneb iga tervikkäigu tulemusel astendajate summa ühe võrra, siis jõutakse lõpuks olukorrani, kus mingi käigu alguses on see summa 1 ehk tahvlil on algarv. Eelneva põhjal saab see juhtuda vaid teise mängija alustatava käigu alguses. Seega teine mängija kaotab.

4. *(Erik Paemurru)*

Leia kõik funktsioonid $f(x)$, mis on määratud kõigil 1-st erinevatel reaalarvudel, omandavad ainult 0-st erinevaid reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad tingimusi $f(0) = 1$ ja $f(f(xy)) = 1 - \dfrac{1}{yf(f(f(x)))}$ alati, kui $xy \neq 0$, $xy \neq 1$ ja $x \neq 1$.

Vastus: $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Lahendus 1. Paneme tähele, et kui $x \neq 0$ ja $x \neq 1$, siis $f(x) \neq 0$ ja $f(x) \neq 1$. Tõepoolest, erinevus 0-st on ülesandes antud ning kui oletada väitevastaselt, et $f(x) = 1$, siis võttes $y = 1$, saaksime $f(f(xy)) = f(f(x)) = f(1)$ ehk $f(f(xy))$ oleks määramata ega saaks rahuldada ülesandes antud võrdust. Seega suvalisele reaalarvule x, mis pole 0 ega 1, on võimalik kuitahes palju kordi rakendada funktsiooni f.

Valides algses võrduses $x = 2$ ja $y = \frac{z}{2}$, kus $z \neq 0$ ja $z \neq 1$, saame

$$f(f(z)) = 1 - \frac{2}{zf(f(f(2)))}.$$

Näeme, et $f(f(z))$ saavutab kõik võimalikud reaalarvulised väärtused peale 1 ja $1 - \frac{2}{f(f(f(2)))}$, kui z omandab kõik reaalarvulised väärtused peale 0 ja 1. Et aga $f(f(z))$ ei saa omandada väärtust 0, siis on ainus võimalus $1 - \frac{2}{f(f(f(2)))} = 0$ ehk $f(f(z))$ omandab kõik reaalarvulised väärtused peale 0 ja 1.

Valides nüüd algses võrrandis $x = z$ ja $y = 1$, kus endiselt $z \neq 0$ ja $z \neq 1$, saame

$$f(f(z)) = 1 - \frac{1}{f(f(f(z)))}.$$

Tähistades siin $f(f(z)) = x$, saame $x = 1 - \frac{1}{f(x)}$ ehk

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \tag{3}$$

mis eelnevat arvestades kehtib mistahes reaalarvu x jaoks peale 0 ja 1. Ülesande tingimuse põhjal $f(0) = 1$, millest tulenevalt kehtib võrdus (3) ka juhul $x = 0$.

Kontroll näitab, et $f(x) = \frac{1}{1-x}$ rahuldab kõiki ülesande tingimusi.

Lahendus 2. Vahetades x ja y rollid, saame võrduse

$$f(f(xy)) = 1 - \frac{1}{xf(f(f(y)))} \tag{4}$$

alati, kui $xy \neq 0$, $xy \neq 1$ ja $y \neq 1$. Kuna võrduse (4) vasak pool võrdub antud võrduse vasaku poolega, on võrdsed ka paremad pooled, millest tulenevalt $yf(f(f(x))) = xf(f(f(y)))$ ehk $\frac{f(f(f(x)))}{x} = \frac{f(f(f(y)))}{y}$ alati, kui $xy \neq 0$, $xy \neq 1$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Fikseerides mingi $y = c$, kus $c \neq 0$, $c \neq 1$, saame siit

$$\frac{f(f(f(x)))}{x} = a, \tag{5}$$

kus $a = \frac{f(f(f(c)))}{c}$, alati kui $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{c}$. Võttes c rolli mingi teise reaalarvu c', saame analoogselt võrduse (5) juhul $a = \frac{f(f(f(c')))}{c'}$, alati kui

$x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq \dfrac{1}{c'}$. Et kõigil reaalarvudel peale mõnede üksikute peavad kehtima võrdused mõlema a jaoks ning erinevate võrduste kehtivuse katkevuspunktid $x = \dfrac{1}{c}$ ja $x = \dfrac{1}{c'}$ on erinevad, siis võrdus (5) peab kehtima alati, kui $x \neq 0$ ja $x \neq 1$.

Kasutades võrdust (5) antud võrrandis, saame $f(f(xy)) = 1 - \dfrac{1}{axy}$ alati, kui $xy \neq 0,\ xy \neq 1,\ x \neq 1$. Iga reaalarv z, kus $z \neq 0,\ z \neq 1$, on esitatav kujul xy, kus $x \neq 1$, järelikult

$$f(f(z)) = 1 - \frac{1}{az} \tag{6}$$

alati, kui $z \neq 0,\ z \neq 1$.

Nagu lahenduses 1 näitame, et $f(z) \neq 0,\ f(z) \neq 1$, kui $z \neq 0,\ z \neq 1$. Seega saab võrrandi (6) pooltele rakendada funktsiooni f, mis annab

$$f(f(f(z))) = f\left(1 - \frac{1}{az}\right) \tag{7}$$

alati, kui $z \neq 0,\ z \neq 1$. Teisalt,

$$f(f(f(z))) = az = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{az}\right)}. \tag{8}$$

Iga reaalarv x, kus $x \neq 1,\ x \neq 1 - \dfrac{1}{a}$, on esitatav kujul $1 - \dfrac{1}{az}$, kus $z \neq 0$, $z \neq 1$. Seega pannes kokku võrrandid (7) ja (8), saame

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} \tag{9}$$

alati, kui $x \neq 1,\ x \neq 1 - \dfrac{1}{a}$. Rakendades võrdust (9) arvudel x, $f(x)$ ja $f(f(x))$, saame $f(f(f(x))) = x$ kõikide reaalarvude korral, välja arvatud mõned üksikud. Seega $a = 1$ ehk võrdus (9) kehtib alati, kui $x \neq 0,\ x \neq 1$. Ülesandes antud võrdusest $f(0) = 1$ saame, et võrdus (9) kehtib ka juhul $x = 0$.

Kontroll näitab, et funktsioon $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ rahuldab kõiki ülesande tingimusi.

Lahendus 3. Asendades $y = \dfrac{c}{x}$, kus $c \neq 0,\ c \neq 1$, saame

$$f(f(c)) = 1 - \frac{x}{cf(f(f(x)))}. \tag{10}$$

Asendades aga algsesse võrrandisse $x = c,\ y = 1$, saame

$$f(f(c)) = 1 - \frac{1}{f(f(f(c))}. \tag{11}$$

Võrduste (10) ja (11) vasakud pooled on võrdsed, järelikult on võrdsed ka paremad pooled, millest tulenevalt $\frac{x}{cf(f(f(x)))} = \frac{1}{f(f(f(c)))}$ iga reaalarvu x korral, kus $x \neq 0$, $x \neq 1$. Viimane võrdus näitab, et $\frac{x}{f(f(f(x)))}$ on konstantne argumentidel $x \neq 0$, $x \neq 1$ ehk saame kirjutada $f(f(f(x))) = ax$ mingi konstandi a jaoks. Asendades nüüd algsesse võrrandisse $y = 1$ ja arvestades seost $f(f(f(x))) = ax$, saame

$$f(f(x)) = 1 - \frac{1}{ax}. \tag{12}$$

Analoogselt lahendusega 1 paneme tähele, et $f(x) \neq 0$, $f(x) \neq 1$, kui $x \neq 0$, $x \neq 1$. Seega võib võrduses (12) asendada x kohale $f(x)$, millest saame

$$ax = f(f(f(x))) = 1 - \frac{1}{af(x)},$$

millest omakorda $f(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-ax}$. Siit

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - a \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-ax}} = \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{1}{ax}\right), \\ f(f(f(x))) &= \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{1}{a \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-ax}}\right) = x. \end{aligned}$$

Järelikult $a = 1$ ehk $f(x) = \frac{1}{1-x}$, kui $x \neq 0$, $x \neq 1$. Ülesande tingimusest $f(0) = 1$ nähtub, et $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ka juhul $x = 0$. Kontroll näitab, et funktsioon $f(x) = \frac{1}{1-x}$ rahuldab kõiki ülesande tingimusi.

Lahendus 4. Nagu lahenduses 1 näitame, et kui $x \neq 0, x \neq 1$, siis saab arvule x rakendada kuitahes palju funktsiooni f.

Järgnevalt näitame, et iga $x \neq 0, x \neq 1$ korral $f(f(f(x))) = x$. Tõepoolest, oletades mingi $x \neq 0, x \neq 1$ korral vastupidist, saame asendada algsesse võrrandisse $y = \frac{1}{f(f(f(x)))}$, mis annab $f\left(f\left(\frac{x}{f(f(f(x)))}\right)\right) = 0$. See on aga vastuolus ülesande tinigmustega.

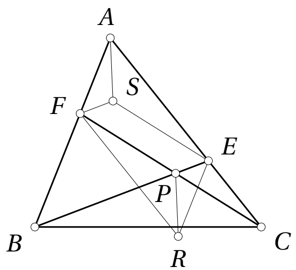
Rakendades nüüd antud võrduses seda omadust, saame $f(f(xy)) = 1 - \frac{1}{xy}$, kui $xy \neq 0, xy \neq 1, x \neq 1$. Rakendades tekkinud võrduse pooltele funktsiooni f ning omadust $f(f(f(x))) = x$ (saame mõlemat teha, sest ei xy ega $1 - \frac{1}{xy}$ pole praegustel eeldustel 0 ega 1), saame $xy = f\left(1 - \frac{1}{xy}\right)$. Tähistades $z = 1 - \frac{1}{xy}$, saame $f(z) = \frac{1}{1-z}$ iga reaalarvu z jaoks peale 0 ja 1, sest kujul $1 - \dfrac{1}{xy}$ esituvad kõik sellised reaalarvud. Ülesande tingimusest $f(0) = 1$ nähtub, et $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ka juhul $x = 0$. Kontroll näitab, et funktsioon $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ rahuldab kõiki ülesande tingimusi.

5. *(Sandra Schumann)*

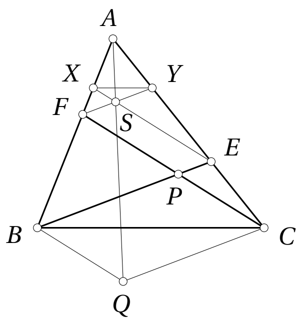
Kolmnurga ABC külgedel CA ja AB valitakse vastavalt punktid E ja F. Sirged BE ja CF lõikuvad punktis P. Olgu Q selline punkt, et $PBQC$ on rööpkülik, ja R selline punkt, et $AERF$ on rööpkülik. Tõesta, et $PR \parallel AQ$.

Lahendus 1. Olgu S selline punkt, et $PESF$ on rööpkülik (joonis 4). Näitame algul, et $PR \parallel AS$. Selleks märkame, et kuna $PE \parallel FS$ ja $ER \parallel AF$, siis $\angle PER = \angle SFA$. Lisaks $|PE| = |FS|$ ja $|ER| = |AF|$, seega on kolmnurgad PER ja SFA võrdsed tunnuse KNK põhjal. Järelikult ka nende kolmnurkade kolmandad küljed on samasihilised ehk $PR \parallel AS$.

Ülesande lahendamiseks piisab nüüd näidata, et punktid A, S ja Q asuvad ühel sirgel. Olgu X sirgete ES ja AF lõikepunkt ning Y sirgete FS ja AE lõikepunkt (joonis 5).



Joonis 4



Joonis 5

Kõigepealt näitame, et $XY \parallel BC$. Tähistame $\dfrac{|AE|}{|AC|} = \kappa$ ja $\dfrac{|AF|}{|AB|} = \lambda$. Kuna $EX \parallel CF$, siis kiirteteoreemi põhjal $\dfrac{|AX|}{|AF|} = \dfrac{|AE|}{|AC|} = \kappa$. Seega $\dfrac{|AX|}{|AB|} = \dfrac{|AX|}{|AF|} \cdot \dfrac{|AF|}{|AB|} = \kappa \cdot \lambda$. Analoogselt saame $\dfrac{|AY|}{|AC|} = \kappa \cdot \lambda$. Kokkuvõttes $\dfrac{|AX|}{|AB|} = \dfrac{|AY|}{|AC|}$, millest järeldubki, et $XY \parallel BC$.

Sellest tulenevalt $\dfrac{|XY|}{|BC|} = \dfrac{|AX|}{|AB|}$. Nüüd jääb tähele panna, et kolmnurgad BCQ ja XYS on sarnased kolme paari samasihiliste külgede tunnusel. Seega

$\frac{|XS|}{|BQ|} = \frac{|XY|}{|BC|}$, mistõttu $\frac{|XS|}{|BQ|} = \frac{|AX|}{|AB|}$. Kuna $XS \parallel BQ$, siis järeldub sellest, et punktid A, S ja Q on ühel sirgel.

Lahendus 2. Tähistame $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{e_1}$ ning $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{e_2}$. Defineerime reaalarvud κ, λ nii, et $\overrightarrow{AE} = \kappa\overrightarrow{e_1}$ ja $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{e_2}$. Siis

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \kappa\overrightarrow{e_1} + \lambda\overrightarrow{e_2},\\ \overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{e_2} - \kappa\overrightarrow{e_1},\\ \overrightarrow{FC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{e_1} - \lambda\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

Defineerime veel reaalarvud α, β nii, et $\overrightarrow{EP} = \alpha\overrightarrow{EB}$ ja $\overrightarrow{FP} = \beta\overrightarrow{FC}$. Siis

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AF} + \beta\overrightarrow{FC} = \lambda\overrightarrow{e_2} + \beta(\overrightarrow{e_1} - \lambda\overrightarrow{e_2}) = \beta\overrightarrow{e_1} + (1-\beta)\lambda\overrightarrow{e_2},\\ \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AE} + \alpha\overrightarrow{EB} = \kappa\overrightarrow{e_1} + \alpha(\overrightarrow{e_2} - \kappa\overrightarrow{e_1}) = (1-\alpha)\kappa\overrightarrow{e_1} + \alpha\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

Järelikult $\beta\overrightarrow{e_1} + (1-\beta)\lambda\overrightarrow{e_2} = (1-\alpha)\kappa\overrightarrow{e_1} + \alpha\overrightarrow{e_2}$. Et vektorid $\overrightarrow{e_1}$ ja $\overrightarrow{e_2}$ pole paralleelsed, siis võrduse kehtimiseks peavad võrduma ka nende vastavad kordajad eraldi ehk $\beta = (1-\alpha)\kappa$ ja $(1-\beta)\lambda = \alpha$, kust $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{e_1} + \alpha\overrightarrow{e_2}$. Nüüd leiame

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP} = (\kappa\overrightarrow{e_1} + \lambda\overrightarrow{e_2}) - (\beta\overrightarrow{e_1} + \alpha\overrightarrow{e_2}) = (\kappa-\beta)\overrightarrow{e_1} + (\lambda-\alpha)\overrightarrow{e_2},\\ \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PB} =\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - (\beta\overrightarrow{e_1} + \alpha\overrightarrow{e_2}) = (1-\beta)\overrightarrow{e_1} + (1-\alpha)\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

Lõikude PR ja AQ paralleelsus on samaväärne vektorite $\overrightarrow{PR}$ ja $\overrightarrow{AQ}$ paralleelsusega, mis on omakorda samaväärne sellega, et nende kahe suunakomponendi kordajad on võrdelised. Seega piisab näidata, et $\frac{\kappa-\beta}{1-\beta} = \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}$ ehk

$$(\kappa-\beta)(1-\alpha) = (\lambda-\alpha)(1-\beta).$$

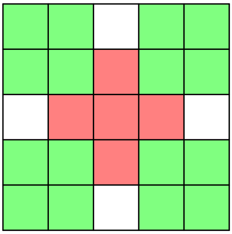
Kuna $\kappa(1-\alpha) = \beta$ ja $\lambda(1-\beta) = \alpha$, siis

$$\begin{aligned}(\kappa-\beta)(1-\alpha) &= \kappa(1-\alpha) - \beta(1-\alpha) = \beta - \beta + \alpha\beta = \alpha\beta,\\ (\lambda-\alpha)(1-\beta) &= \lambda(1-\beta) - \alpha(1-\beta) = \alpha - \alpha + \alpha\beta = \alpha\beta.\end{aligned}$$

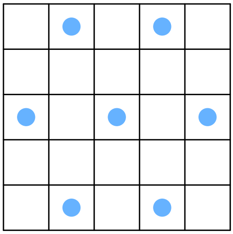
Seega vajalik võrdus kehtib ja ülesanne on lahendatud.

6. *(Richard Luhtaru)*

Leia vähim nuppude arv, mida on võimalik asetada 5×5 ruudustiku ruutudele nii, et ükski kaks nuppu ei asu samal ruudul ega ühist külge omavatel ruutudel (diagonaalis ühist tippu omavatel ruutudel võivad nupud olla) ning ühtegi nuppu ei saa samadel tingimustel ruudustikule lisada.



Joonis 6



Joonis 7

Vastus: 7.

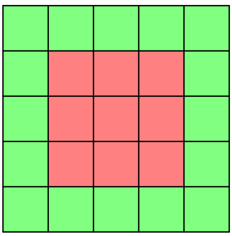
Lahendus 1. Ütleme, et nupp *katab* ruutu, kui nupp asub kas sel ruudul või temaga ühist külge omaval ruudul. Vaatleme nurgaalasid mõõtmetega 2×2 ja 5 ruudust koosnevat keskmist risti (joonisel 6 vastavalt rohelise ja punasega).

Iga nurgaruutu kattev nupp peab paiknema 2×2 nurgaalas, mis hõlmab seda nurgaruutu, mistõttu on igas 2×2 nurgaalas vähemalt 1 nupp. Iga selline nupp katab täpselt 3 ruutu oma nurgaalas, mistõttu igas 2×2 nurgaalas on ruut, mida nurgaalades paiknevad nupud ei kata.

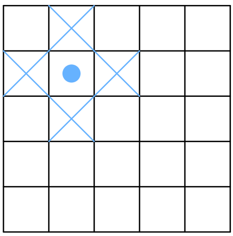
Kui ruudustiku keskmisel ruudul asub nupp, siis ei kata see ühtegi ruutu 2×2 nurgaalades. Üks nupp saab korraga katta vaid kahe erineva 2×2 nurgaala ruute. Järelikult on ruudustikul vähemalt 3 nuppu lisaks 2×2 nurgaalades paiknevale 4 nupule ehk kokku vähemalt 7 nuppu.

Kui ruudustiku keskmine ruut on tühi, siis iga nupp katab ülimalt 2 ruutu keskmises ristis. Seejuures ei saa ükski nupp, mis katab mõnda ruutu keskmises ristis, katta nurgaruutu. Seega on ainuüksi risti katmiseks vaja 3 lisanuppu. Jällegi peab kokku olema vähemalt 7 nuppu.

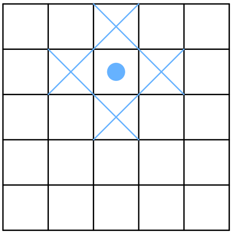
Järelikult on igal juhul vaja vähemalt 7 nuppu. Võimalus 5×5 ruudustiku katmiseks 7 nupuga on toodud joonisel 7.



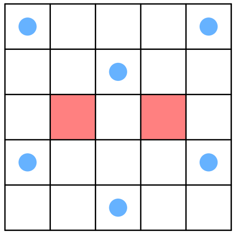
Joonis 8



Joonis 9



Joonis 10



Joonis 11

Lahendus 2. Defineerime katmise nagu lahenduses 1. Oletame, et 5 × 5 ruudustikule on pandud ülimalt 6 nuppu nii, et ühtegi nuppu ülesande tingimusel lisada ei saa. Jaotame 5 × 5 ruudustiku *ääretsooniks* ja *kesktsooniks* (joonisel 8 vastavalt rohelise ja punasega).

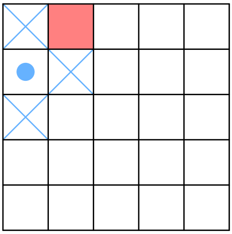
Ääretsoonis paiknev nupp katab sõltumata asukohast täpselt 3 järjestikust ääretsooni ruutu. Kui nupp on seejuures nurgas, siis ei kata ta ühtegi kesktsooni ruutu, muidu aga katab täpselt 1 kesktsooni ruudu. Nurgaruudu katmiseks peab nupp asuma ääretsoonis ning üks ja sama nupp ilmselt mitut nurgaruutu katta ei saa. Seega peab vähemalt 4 nuppu asuma ääretsoonis ja ülimalt 2 nuppu kesktsoonis. Eelneva põhjal katab 4 ääretsooni nuppu kokku 12 ääretsooni ruutu, ääretsoonis on aga kokku 16 ruutu.

Kesktsoonis paiknev nupp katab ülimalt 2 ääretsooni ruutu, kuid 2 ääretsooni ruutu on võimalik katta vaid nii, et kaetud ruutude vahele jääb üksik nurgaruut (joonis 9). Seega katab kesktsoonis paiknev nupp ülimalt 1 ääretsooni ruudu, mis ääretsooni nuppude poolt on katmata. Järelikult katmaks kõiki ääretsooni ruute, peab ääretsoonis asuma vähemalt 5 nuppu. Need katavad ülimalt 15 ääretsooni ja 5 kesktsooni ruutu. Seega peab viimane nupp katma vähemalt 1 ääretsooni ruudu ja 4 kesktsooni ruutu. See on võimalik ainult juhul, kui kaetav ääretsooni ruut asub külje keskel (joonis 10). Nüüd aga on 5 nupu paigutamiseks ääretsooni nii, et nad katavad ülejäänud 15 ääretsooni ruutu, ainus võimalus panna 2 nuppu nurkadesse, aga nii jääb 2 kesktsooni ruutu katmata (joonis 11). Vastuolu näitab, et 5 × 5 ruudustiku katmiseks on vaja vähemalt 7 nuppu.

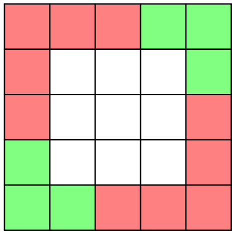
Võimalus 5 × 5 ruudustiku katmiseks 7 nupuga on toodud joonisel 7.

Lahendus 3. Defineerime katmise nagu lahenduses 1. Nurgaruudu katmiseks peab nupp asuma kas nurgas või äärel nurgaruudu kõrval ning üks ja sama nupp mitut nurgaruutu katta ei saa. Seega peab vähemalt 4 nuppu asuma nurgaruudul või äärel nurgaruudu kõrval.

Nurgaruudul katab nupp 3 ruutu. Äärel, kuid mitte nurgas asuv nupp katab 4 ruutu ja mujal asuv nupp katab 5 ruutu. Vaatame kahte juhtu.



Joonis 12



Joonis 13

- Oletame, et rohkem kui 1 nupp asub nurgaruutudel; olgu nurgaruutudel asuvate nuppude arv k. Märkame, et 4 nurki katvat nuppu katavad kokku ülimalt $3k + 4(4 - k)$ ehk $16 - k$ ruutu, mistõttu vähemalt $25 - (16 - k)$ ehk $9 + k$ ruutu jääb nende poolt katmata. Kuna $9 + k > 10$, siis on nende katmiseks vaja vähemalt 3 lisanuppu. Kokku on vaja niisiis vähemalt 7 nuppu.
- Oletame nüüd, et ülimalt 1 nupp asub nurgaruudul. Siis leidub vähemalt üks vastasnurkade paar, mis on mõlemad tühjad. Üldisust kitsendamata olgu vasak ülemine ja parem alumine ruut tühjad ning asugu vasakut ülemist nurka kattev nupp vasakpoolses veerus (joonis 12). Siis katmaks vasaku ülemise nurgaruudu kõrval ülemises reas asuvat ruutu (joonisel 12 punasega), peab teine nupp asuma kas sellel ruudul või ülemise rea keskmisel ruudul. Analoogne mõttekäik kehtib parema alumise nurga kohta. Seega asub kummaski joonisel 13 punasega värvitud piirkonnas 2 nuppu. Peale nende asub kummagi ülejäänud nurga piirkonnas (joonisel 13 rohelisega) 1 nupp. Järelikult asub 6 nuppu ruudustiku äärtel ning on vaja veel 1 nuppu, et katta ära keskmine ruut. Kokkuvõttes on vaja vähemalt 7 nuppu.

Võimalus 5×5 ruudustiku katmiseks 7 nupuga on toodud joonisel 7.

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Richard Luhtaru)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näide, et 4 nuppu on võimalik: 3 p

  Sealhulgas:
  - Sobiv näide mõne suurema nuppude arvu jaoks (nt 6 või 8): *1 p*

  Tõestus, et vähem kui 4 nuppu ei ole võimalik: 4 p

  Sealhulgas:
  - Märgatud, et iga nupp saab „katta“ maksimaalselt 5 ruutu: *2 p*

Ainult õige vastuse ilma põhjenduseta sai 1 punkti. Argumendid stiilis „kui keskel on nupp, siis peab ka nurka nupu panema, mis on ebaoptimaalne“ ilma detailsemate põhjendusteta said reeglina 5 punkti (kui oli toodud sobiv näide 4 nupu jaoks).

Valdav enamus täislahendustest kasutas žürii lahenduse 1 ideed. Mõned õpilased üritasid ülesannet lahendada „ahne algoritmi“ abil, asetades esimese nupu keskele, sest see katab kõige rohkem ruute. Kuigi mõnikord selline strateegia töötab, siis selles ülesandes see paraku edu ei toonud. See illustreerib hästi, miks vettpidava tõestuse jaoks ei piisa argumentidest, et mõni samm tundub „ebaefektiivne“, sest mõnikord võivad esialgu ebaoptimaalsena tunduvad sammud anda parema lõpptulemuse.

Mõned õpilased arvasid, et vastus on 0, sest ülesandes ei ole öeldud, et nuppe peab asetama. Kuigi on tõsi, et nuppe ei pea ülesandes asetama, siis 0 ei sobi vastuseks, sest tühi ruudustik ei rahulda nõuet „ühtegi nuppu ei saa samadel tingimustel ruudustikule lisada“.

2. *(Martin Rahe)*

Erinevate lähenemiste puhul kasutati kaht erinevat hindamisskeemi.

Žürii lahendusega 1 sarnaste lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et viimane number on paaris: 1 p
- Idee vaadata nelja järjestikuse arvu korrutise viimast numbrit: 1 p
- Leitud kõik võimalused, milline saab olla nelja järjestikuse täisarvu korrutise viimane number: 2 p

  Sealhulgas:

    - Toodud välja, et kui mõni tegur jagub 5-ga, siis on viimane number 0: *1 p*
    - Leitud korrutiste $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ ja $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ viimane number: *1 p*
  - Leitud jagatise viimane number korrutamisel saadud arvu mõlema võimaliku viimase numbri korral: 2 p
  - Konstruktsioon mõlema võimaluse jaoks: 1 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

  - Näidatud, et kui mõni tegur jagub 5-ga, siis on viimane number 0: 2 p
  - Juhul, kui tegurid ei jagu 5-ga, viidud korrutis kujule $5m+24$ (või midagi ekvivalentset): 2 p
  - Näidatud, et $8 \mid m$: 1 p
  - Viidud jagatis kujule $10k + 6$ (või midagi ekvivalentset): 1 p
  - Konstruktsioon mõlema võimaluse jaoks: 1 p

3. *(Kadi Siigur)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

  - Leitud eriline arv: 1 p
  - Põhjendatud, et arv on eriline: 2 p
  - Leitud kõikvõimalikud ruutude jäägid 8-ga jagamisel: 2 p
  - Põhjendatud, et leidub lõputult huvitavaid arve kujul $8k + 3$ ja $8k + 5$: 1 p
  - Põhjendatud, et leidub lõputult erilisi arve: 1 p

Üldiselt osutus ülesanne keeruliseks. Ülesande osas a) jätsid paljud õpilased kontrollimata, kas arv on ikkagi eriline, mille tõttu pakuti vastuseks mitmeid huvitavaid arve ja kaotati punkte ka põhjenduse puudumise eest. Ülesande osa b) osutus eriti raskeks, kuna ei tuldud selle peale, et ruutude 8-ga jagamisel tekkivaid jääke uurida.

4. *(Urve Kangro)*

Žürii lahendustega 1 ja 2 sarnaste (asendusvõte ja teguriteks lahutus) tööde allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

  - Avaldatud üks muutujatest esimesest võrrandist ja asendatud teise: 1 p
  - Leitud sobiv võrrandi vasaku poole teguriteks lahutus (kui parem pool on konstant): 3 p
  - Leitud ka parema poole teguriteks lahutus: 1 p
  - Lahendus lõpule viidud: 2 p

Žürii lahendustega 3 ja 4 sarnaste (xy jagub 23-ga) tööde allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Saadud võrrand, kust on näha, et xy peab jaguma 23-ga: 1 p
- Järeldatud, et kas x või y peab jaguma 23-ga: 1 p
- Asendatud võrranditesse $x = 23k$ või $y = 23k$: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

Žürii lahendusega 5 sarnaste tööde allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Esimene võrrand tõstetud ruutu ja lahutatud teine võrrand: 1 p
- Vasak pool lahutatud teguriteks: 3 p
- Parem pool lahutatud teguriteks: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Arvutus- või teisendusvigade eest, kui see andis tulemuseks vigase võrrandi või vale lahendi, võeti maha üks punkt. Lihtsalt proovimise eest punkte ei saanud, samuti ei saanud punkte näiteks lahendite viimaste numbrite või paarsuse uurimise eest.

Ülesanne osutus ootamatult raskeks. Paljudes töödes oli lihtsalt proovitud erinevaid arvude ruute ja järeldatud, et lahendit ei leidu, või siis leitud „lahend“ $x = 12$, $y = 0$, $z = -11$, mis on küll täisarvuline, aga mitte naturaalarvuline. Selle eest punkte ei saanud. Mitmetes töödes oli küll asendus tehtud, aga teguriteks lahutamise peale ei tuldud. Samuti oli mitmetes töödes saadud võrrand, mis sisaldas murdu $\frac{xy}{23}$ ning kus kõik teised liidetavad olid täisarvud, aga sellest ei osatud teha järeldust, et kas x või y peab jaguma 23-ga. Samuti esines väga palju arvutus- ja teisendusvigu.

Märkus. Kui mitte nõuda lahendite täisarvulisust ja positiivsust, siis on lahendeid lõpmatu hulk: $x = 23 + t$, $y = 23 + \frac{253}{t}$, $z = 23 + t + \frac{253}{t}$, kus t on suvaline nullist erinev reaalarv, $t \neq 0$. Sellest avaldisest saab lihtsalt kätte ka kõik täisarvulised lahendid, võttes t väärtusteks kõik arvu 253 positiivsed ja negatiivsed jagajad.

5. *(Aleksei Ganyukov)*

Žürii lahendusega sarnaste tööde allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Väljendatud kavatsus tõestada, et $K = D$: 1 p
- Näidatud, et $AB \parallel DE$: 1 p
- Näidatud, et $\angle DXY = \angle DEY$, ja lahendus lõpule viidud: 5 p

Ülesanne osutus raskeks. Enamasti ei tulnud toime need võistlejad, kellel ei õnnestunud luua head joonist, mis näitaks punktide K ja D kattuvust.

Ülesande tingimus tekitas segadust ja valehüpoteese. Väide, et punkti K asukoht ei sõltu punkti X valikust, tähendab, et fikseeritud punktide A, B, C puhul on punkti K asukoht samuti fikseeritud. Mõned õpilased ekslikult arvasid, et punkti X asukoha muutes ei muutu kolmnurkade AXB ja/või EXY

ümberringjoonte asukoht või suurus. Õpilastel on soovitatav võistlusjärgselt kontrollida oma hüpoteeside paikapidavust, kasutades Geogebra rakendust või selle alternatiive.

Oluline on mõista, et ülesande erijuhtude joonised ei pruugi kajastada kõiki võimalikke olukordi ega ole täislahendused. Lahendused, mis põhinesid punkti X libistamise argumendil, polnud üldjuhul matemaatiliselt täpsed ja punkte ei toonud.

Kui lahendus ei hõlmanud mõlemat konfiguratsiooni (sõltuvalt punktide A, X, Y, B järjestusest ringjoonel), kuid oli korrektne vähemalt ühe konfiguratsiooni puhul, siis selle eest punkte maha ei võetud.

6. *(Andres Alumets)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid liideti.

- Selgelt välja toodud alustajale võitvate ja kaotavate arvude idee: 1 p
- Selgitatud ideed mitte otsida kindlat arvu ja võidustrateegiat, vaid kontrollida ainult nende olemasolu: 1 p
- Lahendus lõpule viidud ammendavate põhjendustega: 5 p

Tüüpviga õpilaste töödes oli kõikide numbrite olemasolu eeldamine isikukoodides. See on ülesande erijuht, kus võitvad ja kaotavad arvud alluvad lihtsale seaduspärasusele. See aga ei ole kogu ülesande lahendamise jaoks kasulik, kuna üldjuhul lihtsat seaduspära leida ei saa. Sellised lahendused said üldjuhul 1 punkti.

Matemaatika lahtine võistlus

9. detsember 2023 **Vanem rühm**

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Toomas Tennisberg)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tuldud mõttele tõsta mõlemad pooled astmesse $\sqrt{2}$ või tehtud muu sarnane kasulik tähelepanek: 4 p
- Lahendus õigesti lõpuni viidud: 3 p

  Sealhulgas:
  - Lahendus mõne algebraveaga lõpuni viidud: *2 p*

Ülesanne osutus üsnagi lihtsaks. Enamik osalejatest suutsid antud arvud avaldada kujul, millest võrdsus on selgelt nähtav. Peamine komistuskoht oli arvu $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$ tõlgendamine kui $\sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt{2}}$. See apsakas on kiire pilguga lugemisel väga kerge tulema ning ülesande parandaja eksis ka nõnda, kui ülesannet esimest korda luges.

2. *(Peeter Aleksander Randla)*

Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte alljärgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Muidu täielik lahendus, aga lõppvastuse arvutamisel tehtud liitmise viga: 7 p
- Muidu täielik lahendus, aga arvutusvea tõttu vaadeldud vähem juhte: 6 p
- Muidu täielik lahendus, aga ülipaaris arvude esinemise mustri põhjendus ebapiisav: 6 p
- Emma-kumma näidislahenduse moodi juhtude läbivaatus, aga ühte tingimust (kas $2^k \cdot d < 1000$ või $2^k > d$) tõlgendatud vigaselt: 5 p
- Emma-kumma näidislahenduse moodi juhtude läbivaatus, aga unustatud ühte tingimust kontrollida (kas $2^k \cdot d < 1000$ või $2^k > d$): 4 p
- Emma-kumma näidislahenduse moodi juhtude läbivaatus, aga arv 1 võimaliku paaritu tegurina arvestamata jäetud (st ei ole loetud vastusesse sisse kahe astmeid): 4 p
- Õigesti leitud, et kahe astmed on ülipaaris: 2 p

- Leitud kõik ülipaaris arvud, kasutades mingit väheadekvaatselt põhjendatud seaduspärasust: 2 p

3. *(Birgit Veldi)*

Lahenduse eest allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tegurdatud $2024! = 2023! \cdot 2^3 \cdot 11^1 \cdot 23^1$: 1 p
- Märgatud, et arvude 2024! ja 2023! kanoonilise esituse astendajate summad on erineva paarsusega: 1 p
- Väidetud, et on võimalik mängida nii, et peale igat tervikkäiku on astendajate summa paarsus muutunud: 1 p
- Näidatud, kuidas peab ChatGPT käima ja kuidas muutub astendajate summa, kui ta sooritab käigu esimest poolt: 2 p

  Sealhulgas:
  - Valesti arvutatud astendajate summa muutus mõnel juhul või strateegia, mis töötab ainult kahe vastasmängija vastumängu korral kolmest: *1 p*
- Näidatud, kuidas peab ChatGPT käima ja kuidas muutub astendajate summa, kui ta sooritab käigu teist poolt: 2 p

Mitu õpilast arvas ekslikult, et 2023! teguriteks on ainult $1, 2, 3, \ldots, 2023$ ja 2024! teguriks lisaks neile ka 2024. Sellisel eeldusel tehtud tähelepanekud tegurite arvu paarsuse kohta kahjuks lahenduseni ei vii.

Osa õpilasi püüdis ülesannet lahendada, üritades mängida Anu ja Berdi mänge sümmeetriliselt. Kuid see ei pruugi olla võimalik, sest mängud ei pea tingimata samal ajal toimuma ning seetõttu ei pruugi saada teises mängus vastavat käiku teha. Isegi, kui mängud toimuks samal ajal, võiks nii tekkida olukord, kus ühest mängust võetakse mingi hulk tegureid ära, aga teises mängus samu tegureid enam pole. Näiteks kui Bert võtaks oma esimesel käigul ära kõik alles olevad kahed, siis ChatGPT ei saaks Anu mängust täpselt sama palju kahtesid ära võtta.

4. *(Hendrik Vija)*

Erinevate lähenemiste hindamiseks kasutati kaht erinevat skeemi.

Žürii lahenduse 4 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Väidetud, et funktsioon $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ rahuldab ülesande tingimusi: 1 p
- Leitud, et iga $x \neq 0, 1$ korral $f(f(f(x))) = x$: 3 p
- Tingimust $f(f(f(x))) = x$ kasutades välistatud kõik funktsioonid peale $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$: 3 p

Žürii lahenduse 1 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Väidetud, et funktsioon $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ rahuldab ülesande tingimusi: 1 p
- Tõestatud, et $f(f(x))$ omandab kõik reaalarvulised väärtused peale 0 ja 1: 4 p

  Sealhulgas:
  - Fikseeritud arv x, varieeritud arvu y ning uuritud, milliseid väärtusi omandab tingimuse parem pool: *1 p*
- Näidatud, et iga $z = f(f(x))$ jaoks $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$: 2 p

  Sealhulgas:
  - Proovitud asendust $y = 1$: *1 p*

Sõltumata lahenduskäigust rakendati tüüpvigade puhul järgmisi karistusi.

- Ei ole arvestatud lisatingimustega $xy \neq 0$, $xy \neq 1$ ja $x \neq 1$, aga seda on võimalik kergesti teha: –1 p
- Ei ole arvestatud lisatingimustega $xy \neq 0$, $xy \neq 1$, $x \neq 1$ ja selle puudujäägi parandamine nõuab rohkem tööd: –2 p

Ülesanne osutus ootuspäraselt küllaltki raskeks. Sageli otsiti funktsiooni f ainult kooliprogrammist tuttavate funktsioonide hulgast. Sellistes töödes leiti, et kuna funktsiooni määramispiirkonda ei kuulu arv 1 ning muutumispiirkonda ei kuulu arv 0, siis funktsioon $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ on loomulik valik. See on hea meetod vastuse ära arvamiseks, kuid endiselt tuleb näidata, et ükski muu funktsioon ei sobi, mis on ülesande põhiosa.

Paljudes töödes jõuti asenduste $y = 1$ ja $z = f(f(x))$ abil järeldusele, et $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, ning lõpetati lahendus ära. Tegelikult ei saa aga z olla mis tahes reaalarv, vaid ainult selline arv, mida on võimalik saada mingile reaalarvule x kaks korda funktsiooni f rakendades. Samuti oldi paljudes töödes hooletu kontrollimisega, et ei mindaks vastuollu ülesande tingimustega $xy \neq 0, xy \neq 1, x \neq 1$.

5. *(Kristjan-Erik Kahu)*

Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte alljärgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Täislahenduses kasutatav lisakonstruktsioon: 3 p
- Kasutu proovimine: 0 p
- Algusesse toppama jäänud analüütiline lahendus: 0 p

Ülesanne oli üllatavalt raske. Ülesande afiinset püstitust arvestades oleks võinud analüütilist lähenemist kõvasti rohkem olla. Praegu üritas seda vaid 2 inimest (üks küll ebaõnnestunult). Hetkel ei ole antud lisakonstruktsioonide eest kellelegi punkte, kuna parandaja ei suutnud neist ühtegi täislahenduseks viia. Õpilasel, kes esitab apellatsioonis täislahenduse, mis kasutab (sisuliselt muidugi) mõnda töös kasutatud lisakonstruktsiooni ning demonstreerib seeläbi lisakonstruktsiooni kasulikkust, võib lisakonstruktsiooni eest punkte saada.

6. *(Marko Tsengov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Toodud korrektne konstruktsioon 7 nupu asetuse jaoks: 1 p
- Tõestatud, et 6 nupuga konstruktsiooni ei leidu: 6 p

Väga mitmed lahendajad üritasid enda tõestuses mingil hetkel väita mingisuguse asetuse või valiku optimaalsust, kuid ilma konkreetse tõestuseta on see alati alusetu väide ning argumenti arvesse ei võeta. Erinevaid lahendusmeetodeid ülesandele oli üllatavalt palju, erinedes näiteks algselt varieeritava omaduse poolest (nurkadesse nuppude paigutamine, kasutamata „kaetud“ ruutude loendamine jne).