Ülesandeid Jaapani 1996. ja 1997.a. olümpiaadidelt

1. Mitme nulliga lõpeb arvu $1997!$ üleskirjutus kümnendsüsteemis?

2. Leia tetraeedri kõiki tippe läbiva sfääri raadius, kui tetraeedri tippude koordinaadid on $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$.

3. Tasandile on joonistatud 30 erinevat lõiku. Loeme kokku kõik punktid, mis on mingi lõigu otspunktiks. Milline on niisuguste punktide vähim võimalik arv?

4. Kümme musta ja viis valget nuppu tuleb seada ritta nii, et iga valge nupu parempoolne naaber oleks must. Mitmel erineval viisil on seda võimalik teha?

5. Olgu positiivse täisarvu n korral $a_n = 10^{2n} - 10^n + 1$. Leia arvu $2\sqrt{a_n}$ täisosa.

6. Kolmemõõtmelises ruumis paikneb hulknurk, mille projektsioonil xy-tasandile saame kujundi pindalaga 13, projektsioonil yz-tasandile kujundi pindalaga 6 ja projektsioonil xz-tasandile kujundi pindalaga 18. Leia selle hulknurga pindala.

7. Olgu a võrrandi $x^3 - x - 1 = 0$ üks lahend. Leia täisarvuliste kordajatega kuupvõrrand, mille üheks lahendiks on a^2.

8. Leia täisarvuliste kordajatega polünoom $f(x)$, mille pealiikme kordaja on 1 ning mille korral $f(a+\sqrt{2}) = 0$, kus $a^3 - a - 1 = 0$.

9. Kui palju on funktsioone $f : A \to A$, mis rahuldavad iga $x \in A$ korral tingimust $f(f(f(x))) = x$, kui
   a) $A = \{1,2,3,4,5\}$;
   b) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$?

10. Olgu n kümnekohaline kümnendsüsteemis üleskirjutatud arv. Arvu n esimene number on võrdne nullide arvuga selles arvus, teine number ühtede arvuga jne. Leia kõik sellised arvud n.

11. Olgu $f(x)$ selline viienda astme polünoom, et võrrandil $f(x)+1=0$ on kolmekordne lahend $x=-1$ ja võrrandil $f(x)-1=0$ on kolmekordne lahend $x=1$. Leia polünoom $f(x)$.

12. Olgu $\mathbb{N}$ kõikide positiivsete täisarvude hulk. Funktsioon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rahuldab järgmisi tingimusi:
    (1) $f(xy) = f(x) + f(y) - 1$ iga $x, y \in \mathbb{N}$ korral;
    (2) on ainult lõplik hulk arve x, mille korral $f(x) = 1$;
    (3) $f(30) = 4$.

    Leia $f(14400)$.

13. Leia kõik niisugused positiivsete täisarvude paarid (a,b), et $a \geqslant b$ ning
    $$\mathrm{VÜK}(a,b) + \mathrm{SÜT}(a,b) + a + b = ab.$$

14. Olgu $\mathbb{Z}$ kõikide täisarvude hulk. Funktsioon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ rahuldab järgmisi tingimusi:
    (1) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1996$ iga $x \in \mathbb{Z}$ korral;
    (2) $f(x+1997) = f(x)$ iga $x \in \mathbb{Z}$ korral;
    (3) $f(xy) \equiv f(x)f(y) \pmod{1997}$ iga $x, y \in \mathbb{Z}$ korral;
    (4) $f(2) = 999$.

    On teada, et leidub täpselt üks selliste omadustega funktsioon. Leia vähim positiivne täisarv, mille korral $f(x) \equiv 1000 \pmod{1997}$.

15. Tahvlile on kirjutatud täisarvud $1, 2, \ldots, n$ selles järjekorras. Kõigepealt kustutame vasakult paremale liikudes iga teise arvu, s.t. arvud $2, 4, 6, \ldots$. Seejärel kustutame paremalt vasakule liikudes järelejäänute hulgast iga teise arvu, edasi kustutame jällegi vasakult paremale liikudes järelejäänute hulgast iga teise arvu, jne. Näiteks kui $n = 7$, kustutame me arvud $2, 4, 6, 5, 1, 7$ ning järele jääb arv 3. Milline arv jääb järele juhul, kui $n = 1997$?

16. Olgu f kõikide mittenegatiivsete täisarvude korral defineeritud funktsioon, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

$$f(0) = 0\,;$$

$$f(x) = f\left(\left[\frac{x}{10}\right]\right) + \left[\log_{10} \frac{10}{x - 10\left[\dfrac{x-1}{10}\right]}\right]$$

Millise argumendi x korral $(0 \leqslant x \leqslant 1996)$ on $f(x)$ väärtus suurim?

17. 1996 lampi on nummerdatud arvudega $1, 2, \ldots, 1996$. Algul on kõik lambid välja lülitatud. Mistahes positiivse täisarvu k korral tähistagu P_k kõikide nende lampide oleku muutmist ("põleb" $\to$ "ei põle" või "ei põle" $\to$ "põleb"), mille numbrid on arvu k kordsed. Mitu lampi põleb pärast seda, kui oleme teinud järjest operatsioonid $P_1, P_2, \ldots, P_{1996}$?