Ülesandeid Iraani 1997.a. olümpiaadidelt

1. Tõesta, et positiivsed reaalarvud a, b ja c on mingi kolmnurga küljepikkusteks siis ja ainult siis, kui kehtib võrratus $2(a^4+b^4+c^4) < (a^2+b^2+c^2)^2$.

2. Olgu P kolmnurga ABC külje BC keskpunkt. Konstrueerime kolmnurga ABC külgedele AB ja AC väljapoole kolmnurka vastavalt võrdhaarsed täisnurksed kolmnurgad AMB ja ANC . Tõesta, et kolmnurk MPN on samuti võrdhaarne ja täisnurkne.

3. Olgu S lõplik reaalarvude hulk, millel on järgmine omadus: mistahes kahe erineva arvu a ja b korral hulgast S leidub hulgas S kolmas arv c , nii et arvud a , b ja c mingis järjekorras võetuna moodustavad aritmeetilise progressiooni. Kas hulk S võib olla: a) 5-elemendiline; a) 6-elemendiline?

4. Olgu Γ diameetrile AB toetuv poolringjoon keskpunktiga O . Valime kiirel OB punkti M , nii et $|OM| > |OB|$. Lõigaku mingi punkti M läbiv sirge poolringjoont Γ punktides C ja D , kusjuures $|MC| > |MD|$ ning $C \neq A$. Olgu K kolmnurkade AOC ja BOD ümberringjoonte teine lõikepunkt. Tõesta, et $\angle OKM = 90°$.

5. Tähistagu $\mathbb{N}$ kõikide positiivsete täisarvude hulka. Vaatleme funktsioone $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mis rahuldavad iga $n \in \mathbb{N}$ korral tingimusi $f(n) \geqslant 2$ ja $f(n) + f(n+2) = f(n+4)f(n+6) - 1997$.
   a) Leia $f(1997)$ ja $f(1999)$, kui $f(1) = 2$.
   b) Kirjelda kõik antud tingimusi rahuldavad funktsioonid.