Algebraülesandeid “Balti tee ’99” võistkonnale

Tartus, 25. oktoobril 1999

Ülesanded, vastused ja lahendusideed

Ülesanne 1 pärineb USA 1991/92 õppeaasta matemaatiliste annete otsingu programmist (*US Mathematical Talent Search*), ülesanded 2, 3, 6 ja 8 Lõuna-Aafrika Vabariigi analoogilisest programmist 1995/96 õppeaastal ning ülesanne 5 India olümpiaadide ülesannete kogumikust. Ülesanne 4 esines Horvaatia 1998.a. olümpiaadi piirkondlikus voorus ning ülesanded 7 ja 9 pakuti osalevate riikide poolt “Balti Tee ’98” žüriile.

1. Reaalarvude a, b, x, y jaoks kehtivad järgmised võrdused:

$$\begin{cases} a+b=12 \\ ax+by=115 \\ ax^2+by^2=187 \\ ax^3+by^3=877 \end{cases}$$

Leia avaldise ax^4+by^4 väärtus.

Vastus: 1999.

Lahenduse skeem. Olgu $P(n) = ax^n + by^n$. Tõestame, et kehtib seos $P(n+1) = A \cdot P(n) + B \cdot P(n-1)$, kus A ja B on kordajad, mis ei sõltu n väärtusest (täpsemalt $A = x+y$ ja $B = -xy$). Kasutades teadaolevaid väärtusi $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ ja $P(3)$ leiame $A = 1$ ja $B = 6$ ning nende abil $P(4)$.

Märkus. Kasutades võrdusi $x+y = 1$ ja $xy = -6$ ning $a+b = 12$ ja $ax+by = 115$ saame leida ka a, b, x, y väärtused.

2. Nullist erinevad reaalarvud a, b ja c rahuldavad võrdusi

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}.$$

Leia avaldise $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ võimalikud väärtused.

Vastus: -1 ja 8.

Lahenduse skeem. Ülesandes antud võrdused võime ümber kirjutada kujul $a+b=kc$, $b+c=ka$ ja $c+a=kb$, millest $2(a+b+c)=k(a+b+c)$. Kui $a+b+c=0$, siis $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=-1$; vastasel korral aga $k=2$ ja $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=k^3=8$.

3. Tõesta, et:

   a) kui $a+b+c=0$, siis $ab+bc+ca \leqslant 0$;

   b) kui $a+b+c=1$, siis $ab+bc+ca \leqslant \dfrac{1}{3}$.

   Lahenduse skeem. a) Kasutame võrdust $(a+b+c)^2=0$. b) Teeme asenduse $a=x+\dfrac{1}{3}$, $b=y+\dfrac{1}{3}$, $c=z+\dfrac{1}{3}$, siis $x+y+z=0$ ning saame kasutada a) osa tulemust.

4. Mitu lahendit on võrrandil $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$ lõigul $[0,1]$?

   Vastus: 4 lahendit.

   Lahenduse skeem. Paneme tähele, et 0 ja 1 ei ole võrrandi lahendid, ning teeme asenduse $x=\cos\varphi$, kus $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$. Võrrand teisendub kujule $-8\cos\varphi\cos 2\varphi\cos 4\varphi=1$, millest teguriga $\sin\varphi$ läbi korrutades saame $\sin 8\varphi+\sin\varphi=0$, ehk $2\sin\dfrac{9\varphi}{2}\cos\dfrac{7\varphi}{2}=0$. Seega $\varphi=\dfrac{2}{9}k\pi$ või $\varphi=\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{2}{7}k\pi$, kust tingimust $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ arvestades leiame lahendid $\varphi=\dfrac{2\pi}{9}$, $\varphi=\dfrac{4\pi}{9}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{7}$ ja $\varphi=\dfrac{3\pi}{7}$.

5. Tõesta, et mistahes paaritute täisarvude a, b ja c korral ei ole võrrandil $ax^2+bx+c=0$ ratsionaalarvulisi lahendeid.

   Lahendus 1. Võrrandi lahendid $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ on ratsionaalarvud siis ja ainult siis, kui $\sqrt{b^2-4ac}$ on ratsionaalarv. Et ruutjuur täisarvust on kas täisarv või irratsionaalarv, siis piisab näidata, et b^2-4ac ei ole täisruut. Tõepoolest: kui $b^2-4ac=k^2$ täisarvu k korral, siis $4ac=(b+k)(b-k)$ jaguks 8-ga, mis ei ole võimalik.

Lahendus 2. Olgu taandumatu murd $x = \dfrac{p}{q}$ võrrandi lahendiks, siis $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Seega $a = qa_1$ ja $c = qc_1$ ning asendades saame $a_1p + b + c_1q = 0$. Asendades $a_1 = 2k+1$, $b = 2l+1$ ja $c_1 = 2m+1$ leiame, et $p + q + 1$ peab olema paaritu arv, s.t. p või q peab olema paaris. Kui $p = 2s$, siis $4as^2 + 2bqs + cq^2 = 0$, mis ei ole võimalik; analoogilise vastuolu saame ka juhul, kui $q = 2t$.

6. Leia võrrandi $x^3 + x^2 + x = -\dfrac{1}{3}$ reaalarvulised lahendid.

   Vastus: ainus lahend on $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

   Lahenduse skeem. Teisendame võrrandi kujule $3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$, ehk $(x+1)^3 = -2x^3$, kust $x + 1 = -\sqrt[3]{2} \cdot x$.

7. Tõesta, et $\sin^2 17^\circ + \sin^2 67^\circ + 2\sin 17^\circ \sin 67^\circ \sin 6^\circ = \sin^2 84^\circ$.

   Lahendus 1. Rakendades koosinusteoreemi kolmnurgas, mille külgede a, b, c vastasnurkade suurused on vastavalt 17°, 67° ja 96°, saame

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 96^\circ = a^2 + b^2 + 2ab\sin 6^\circ .$$

   Arvestades, et $\dfrac{a}{\sin 17^\circ} = \dfrac{b}{\sin 67^\circ} = \dfrac{c}{\sin 96^\circ}$ ning $\sin 96^\circ = \sin 84^\circ$, saamegi nõutava võrduse.

   Lahendus 2. Avades võrduses $\sin^2(\alpha+\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)^2$ sulud ning asendades $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$ ja lihtsustamise järel $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$, saame seose

$$\sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) .$$

   Ülesandes nõutava võrduse saame, kui $\alpha = 17^\circ$ ja $\beta = 67^\circ$.

8. Olgu a ja b sellised positiivsed reaalarvud, et a^3, b^3 ja $a+b$ on ratsionaalarvud. Tõesta, et a ja b on ratsionaalarvud.

   Lahenduse skeem. Piisab näidata, et $a - b$ on ratsionaalarv. Võrdusest $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ saame, et ab on ratsionaalarv; seega ka $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab} = \dfrac{a^3 - b^3}{(a+b)^2 - ab}$ on ratsionaalarv.

9. Milliste positiivsete täisarvude paaride (m, n) korral saab $m \times n$ ruudustiku igasse ruutu kirjutada ühe täisarvu nii, et kõik arvud ei ole võrdsed nulliga ning igas horisontaalreas, igas vertikaalreas ja igas diagonaalreas olevate arvude summa on võrdne nulliga?

Vastus: $m \geqslant 4$ ja $n \geqslant 4$.

Lahenduse skeem. Kui $m \leqslant 3$ või $n \leqslant 3$, veendume ruudustiku nurgast lähtudes ning järjest sobivaid diagonaal-, horisontaal- ja vertikaalridasid kasutades (nurgaruut moodustab omaette diagonaalrea pikkusega 1), et kõik ruudustikus olevad arvud peavad olema võrdsed nulliga. Kui $m \geqslant 4$ ja $n \geqslant 4$, võime ruudustiku mingi 4×4 ruudust koosneva alamosa täita allpool näidatud viisil ja kõikidesse ülejäänud ruutudesse kirjutada nullid.

0	1	−1	0
−1	0	0	1
1	0	0	−1
0	−1	1	0