Algebraülesandeid “Balti tee ’99” võistkonnale

Tartus, 25. oktoobril 1999

1. Reaalarvude a, b, x, y jaoks kehtivad järgmised võrdused:

$$\begin{cases} a+b=12 \\ ax+by=115 \\ ax^2+by^2=187 \\ ax^3+by^3=877 \end{cases}$$

Leia avaldise ax^4+by^4 väärtus.

2. Nullist erinevad reaalarvud a, b ja c rahuldavad võrdusi

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}\,.$$

Leia avaldise $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ võimalikud väärtused.

3. Tõesta, et:

a) kui $a+b+c=0$, siis $ab+bc+ca\leqslant 0$;

b) kui $a+b+c=1$, siis $ab+bc+ca\leqslant \dfrac{1}{3}$.

4. Mitu lahendit on võrrandil $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$ lõigul $[0,1]$?

5. Tõesta, et mistahes paaritute täisarvude a, b ja c korral ei ole võrrandil $ax^2+bx+c=0$ ratsionaalarvulisi lahendeid.

6. Leia võrrandi $x^3+x^2+x=-\dfrac{1}{3}$ reaalarvulised lahendid.

7. Tõesta, et $\sin^2 17^\circ+\sin^2 67^\circ+2\sin 17^\circ \sin 67^\circ \sin 6^\circ=\sin^2 84^\circ$.

8. Olgu a ja b sellised positiivsed reaalarvud, et a^3, b^3 ja $a+b$ on ratsionaalarvud. Tõesta, et a ja b on ratsionaalarvud.

9. Milliste positiivsete täisarvude paaride (m,n) korral saab $m\times n$ ruudustiku igasse ruutu kirjutada ühe täisarvu nii, et kõik arvud ei ole võrdsed nulliga ning igas horisontaalreas, igas vertikaalreas ja igas diagonaalreas olevate arvude summa on võrdne nulliga?