1994. ja 1996.a. “Balti Tee” võistlustele pakutud ülesandeid

1. Olgu m ja n täisarvud, $m, n > 1$. Tõesta, et kehtib võrratus
$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} > 1 .$$
2. Reaalarvud x ja y rahuldavad tingimusi
$$x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0 , \qquad y^3 - 3y^2 + 5y + 11 = 0 .$$
Leia $x + y$.
3. Olgu M reaalarv, $M \geqslant 4$. Kui palju leidub positiivseid reaalarve $x \leqslant M$, mille korral arvudel x^2 ja $4x$ on sama murdosa?
4. Raudteel on jaamad $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ selles järjekorras, kusjuures jaamade A_1 ja A_{11} vahekaugus on 56 km. On teada, et iga $i = 1, 2, \ldots, 9$ korral ei ületa jaamade A_i ja A_{i+2} vahekaugus 12 km ning iga $i = 1, 2, \ldots, 8$ korral on jaamade A_i ja A_{i+3} vahekaugus vähemalt 17 km. Kui kaugel on teineteisest jaamad A_2 ja A_7 ?
5. Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reaalarvud ja $m \leqslant n$. Nimetame arvu x_i m*-juhiks*, kui leidub täisarv p , nii et $1 \leqslant p \leqslant m$ ja $x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+p-1} \geqslant 0$. Tõesta, et kõikide m-juhtide summa on mittenegatiivne.
6. Reaalarvude jada $\{x_n\}$ on määratud võrdustega $x_1 = a$ ja $x_{n+1} = 1 - x_n^2$ iga $n \geqslant 1$ korral. Milliste a väärtuste korral kehtib võrdus $x_{10} = a$?
7. Olgu a, b, c, d positiivsed täisarvud ja $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4abcd$. Tõesta, et ükski arvudest a, b, c, d ei jagu arvuga 5 .
8. Olgu X lõplik punktihulk kolmemõõtmelises ruumis, millel on järgmine omadus: mistahes kolm erinevat punkti P , Q ja R hulgast X on mingi niisuguse võrdhaarse kolmnurga tippudeks, mille alus pole selle haaradest pikem. Tõesta, et hulk X sisaldab ülimalt 6 punkti.
9. Tõesta, et kuup ruumalaga 2 on võimalik tasandiliste lõigetega niimoodi tükeldada (eelmiste lõigete tulemusena moodustunud tükke võib enne järgmist lõiget ümber paigutada), et saadud tükkidest saab kokku panna kaks kuupi ruumalaga 1 .
10. Kas 13 ühikkuubist on võimalik koostada niisugune hulktahukas, et kahest sellisest hulktahukast saaks omakorda kokku panna $3{\times}3{\times}3$ kuubi, milles puudub keskmine ühikkuup?
11. Tähtsate Paberite Ameti bürokraadid on koostanud hulga käskkirju. On teada, et:
    (i) igale käskkirjale on alla kirjutanud täpselt kaks bürokraati;
    (ii) ei leidu kaht käskkirja, millele oleksid alla kirjutanud samad bürokraadid;
    (iii) iga bürokraat on alla kirjutanud täpselt k käskkirjale.

    Milliste k väärtuste korral on igal juhul võimalik kõik need käskkirjad visata k paberikorvi nii, et igas paberikorvis leiduks iga bürokraadi allkirjaga käskkiri?