Ülesandeid nuputamiseks (algoritmidest)

Alljärgnev valik ülesandeid pärineb raamatust: A. Andžāns, I. Boze, P. Vaderlind, *Matemātikas olimpiāžu minimums*, Riga 1995.

1. Tahvlile kirjutatakse ritta arvud $1, 2, \ldots, 1996$. Edasi tegutsetakse nii, et igal sammul kustutatakse rea algusest kaks arvu ära ja kirjutatakse nende korrutis rea lõppu juurde. Milline arv jääb lõpuks ainsana tahvlile?

2. Arvud 1 kuni 1996 kirjutatakse seekord ringjoonele (selles järjekorras). Arvust 1 alustades ja mööda ringjoont liikudes tõmmatakse kogu aeg iga teine arv maha (s.t. 1 alles, 2 maha, 3 alles, 4 maha, jne). Milline arv jääb lõpuks alles?

3. Arvujada esimesed kaks liiget on 11 ja 26 ning iga järgmine liige on eelmise kahe liikme summa "modulo 100 " (s.t. selle kahest viimasest numbrist koosnev arv). Kas selles jadas tulevad kunagi järjest ette arvud 19 ja 96 ?

4. N röövlit on hädas rikkaliku saagi jaotamisega, kuna neist igaühel on selle erinevate osade väärtusest oma arusaamine. Kuidas peaksid röövlid oma saagi jagama, et igaüks neist oleks enda arvates saanud vähemalt $\frac{1}{N}$ osa sellest? (Eeldame, et saak on suvaliselt jagatav ja mistahes jagamise korral on osade väärtuste summa iga röövli arvates võrdne terviku väärtusega.)

5. Kaks mängijat värvivad kordamööda ruute lõpmatul ruudulisel paberil. Mängija A värvib oma käigul siniseks mistahes ruudu, mis omab ühist külge mõne juba sinise ruuduga (v.a. esimesel käigul). Mängija B värvib oma käigul punaseks ühe suvalise ruudu. Tõesta, et mängija B saab alati tekitada olukorra, kus A ei saa enam käia. (Näita võimalikult lihtne algoritm selleks!)

6. 100 lahtises karbis on kokku 200 kompvekki (igas karbis võib seejuures olla mistahes arv kompvekke 0-st kuni 200-ni). Mängijad A ja B asuvad kordamööda ühekaupa kompvekke ära sööma (esimesena võtab kompveki A). Tõesta, et B saab tegutseda nii, et viimastena allesjäävad 2 kompvekki oleksid ühes karbis.

7. 8×8 ruudustiku iga ruut on kas must või valge. Ühekorraga võib ümber värvida kõik ruudud, mis on ruudustiku mingis ühes reas ja ühes veerus (s.t. korraga 15 ruutu). Kas suvalisest algseisust lähtudes saab jõuda olukorrani, kus ruudud on värvitud malekorras?

8. Raamaturiiulil on õiges järjekorras ühe suurromaani n köidet. Korraga võib omavahel vahetada mistahes kaks kõrvutiasuvat köidet. Kas niimoodi tegutsedes on võimalik saavutada köidete kõik võimalikud $n!$ järjestust, kordamata seejuures ühtegi järjestust rohkem kui üks kord?

9. On antud kangkaalud ja n erineva raskusega kaaluvihti. Tõesta, et asetades vihte ühekaupa sobivas järjekorras sobivatele kaalukaussidele, on võimalik "realiseerida" kõik 2^n erinevat n-elemendilist jada, mille elementideks on tähed V ja P (nt. jada $VPVVP$ "realiseerimine" $n = 5$ korral tähendab, et pärast 1. vihi kaalule asetamist on allpool vasakpoolne kaalukauss, 2. vihi asetamise järel parempoolne, 3. ja 4. vihi järel vasakpoolne ja 5. vihi järel jälle parempoolne kaalukauss).

10. Tõesta, et mistahes 3^n järjestikuse naturaalarvu seast on võimalik valida välja 2^n arvu nii, et ükski valitud arvude kolmik ei moodustaks aritmeetilist progressiooni.