## Treeningvõistluse ülesanded

### 1. detsembril 1996

1. Ringjoonele $\mathcal{C}_1$ on selle diameetri $AB$ otspunktidest joonestatud kaks paralleelset puutujat. Ringjoon $\mathcal{C}_2$ puutub ringjoont $\mathcal{C}_1$ väliselt punktis $C$ ja ringjoonele $\mathcal{C}_1$ punktist $A$ tõmmatud puutujat punktis $D$. Tõesta, et punktid $B$, $C$ ja $D$ asuvad ühel sirgel.

2. Tõesta, et funktsioon $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ rahuldab järgmisi tingimusi:

   a) $-1 < f(x) < 1$ mistahes reaalarvu $x$ korral;

   b) $f(x) \neq f(y)$, kui $x \neq y$;

   c) iga reaalarvu $a$ $(-1 < a < 1)$ korral leidub selline reaalarv $x$, et $f(x) = a$

   (s.t. funktsioon $f(x)$ on bijektsioon kogu reaalarvude hulgast vahemikule $(-1;1)$ ).

3. Tõesta, et suvalise positiivse täisarvu $k$ jaoks leidub selline algarv $p$ ning täisarvud $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ (s.t. lõpmatu kasvav positiivsete täisarvude jada $(a_n)$ ) nii, et $p + ka_1, p + ka_2, p + ka_3, \ldots$ on kõik algarvud.

4. Leia kõik niisugused funktsioonid $f(x)$, mis on määratud kõikide ratsionaalarvude hulgal ja rahuldavad tingimusi:

   a) $f(1) = 1996$;

   b) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ mistahes ratsionaalarvude $x, y$ korral.