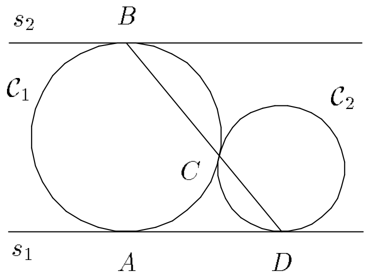
1. dets. treeningvõistluse ülesannete lahendused

1. Olgu s_1 ja s_2 ringjoonele $\mathcal{C}_1$ vastavalt punktidest A ja B tõmmatud puutujad (vt. joonist 1) ning r_1 ja r_2 vastavalt ringjoonte $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ raadiused. Teeme homoteetsusteisenduse keskpunktiga punktis C ja teguriga $-\dfrac{r_2}{r_1}$. Ringjoon $\mathcal{C}_1$ teisendub seejuures ringjooneks $\mathcal{C}_2$, sirge s_2 sirgeks s_1 ja punkt B punktiks D.



Joonis 1

2. Tingimuse a) täidetus järeldub otseselt sellest, et $|x| < 1 + |x|$ mistahes reaalarvu x korral.

   b) Olgu $f(x) = f(y)$ mingite reaalarvude x, y korral, siis $(1 + |x|) \cdot y = (1 + |y|) \cdot x$, millest $x - y = |x| \cdot y - |y| \cdot x$. Kui $x = 0$, siis ilmselt ka $y = 0$. Olgu nüüd $x, y \neq 0$. Kui $x \neq y$, siis ka $|x| \cdot y \neq |y| \cdot x$ ning $\dfrac{x}{y} \neq \left|\dfrac{x}{y}\right|$, s.t. $\dfrac{x}{y} < 0$. Seega on arvud x ja y erimärgilised, kuid siis on ka arvud $(1 + |x|) \cdot y$ ja $(1 + |y|) \cdot x$ erimärgilised, mis on vastuolus eeldusega $f(x) = f(y)$. Saadud vastuolu näitab, et peab olema $x = y$.

   c) Olgu a mistahes reaalarv vahemikust $(-1; 1)$, s.t. $-1 < a < 1$ — leiame nõutud arvu x. Kui $a = 0$, siis ilmselt sobib $x = 0$. Kui $a > 0$, siis arv $x = \dfrac{a}{1-a} > 0$ rahuldab tingimust $\dfrac{x}{1+x} = a$. Kui $a < 0$, siis arv $x = \dfrac{a}{1+a} < 0$ rahuldab tingimust $\dfrac{x}{1-x} = a$.

3. Jaotame kõik algarvud k paarikaupa ühisosata hulgaks vastavalt jäägile, mille nad annavad arvuga k jagamisel. Dirichlet' printsiibi põhjal on siis vähemalt ühes neist hulkadest lõpmata palju elemente. Valime sellest hulgast elemendid $x_0, x_1, x_2, \ldots$ nii, et $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ ning võtame $p = x_0$ ja $a_n = \dfrac{x_n - p}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

4. *Vastus:* $f(x) = 1996^x$ on ainus niisugune funktsioon.

   Paneme kõigepealt tähele, et kui funktsioon $f(x)$ on ülesandes nõutud omadustega, siis $f(1) = f(0) \cdot f(1)$, kust $f(0) = 1$. Edasi näitame induktsiooniga n järgi, et mistahes ratsionaalarvu x ja positiivse täisarvu n korral $f(nx) = f(x)^n$. Tõepoolest, $n = 1$ korral on väide ilmne ning kui $f(nx) = f(x)^n$, siis ka $f((n+1)x) = f(nx) \cdot f(x) = f(x)^{n+1}$.

   Kasutades eelmises lõigus tõestatud võrdust $x = \dfrac{1}{n}$ korral saame $f(1) = f\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$, kust $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(1)^{\frac{1}{n}}$ ja sellest omakorda $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = f\left(\dfrac{1}{n}\right)^m = f(1)^{\frac{m}{n}}$, kus m ja n on mistahes *positiivsed* täisarvud.

   Lõpuks kasutame võrdust $1 = f(0) = f(x) \cdot f(-x)$, millest $f(-x) = f(x)^{-1}$ ning seega $f\left(-\dfrac{m}{n}\right) = f\left(-\dfrac{m}{n}\right)^{-1} = f(1)^{-\frac{m}{n}}$.

   Teiselt poolt on ilmne, et funktsioon $f(x) = 1996^x$ rahuldab ülesande tingimusi.