

Treeningvõistluse ülesanded

30. novembril 1996

1. Ühikkuubi pinnale joonestatakse kinnine murdjoon, nii et kuubi igal tahul paikneb vähemalt üks selle murdjoone lüli. Tõesta, et selle murdjoone pikkus on vähemalt $3\sqrt{2}$.
2. Olgu $n \geq 2$ ja x_1, x_2, \dots, x_n mistahes reaalarvud lõigult $[0, 1]$. Tõesta, et leidub selline indeks i , $1 \leq i \leq n - 1$, mille korral kehtib võrratus $x_i(1 - x_{i+1}) \geq \frac{1}{4}x_1(1 - x_n)$.
3. Punktid K , L , M , N asuvad vastavalt kumera nelinurga $ABCD$ külgedel AB , BC , CD ja DA nii, et

$$\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CD|} = \frac{|DN|}{|DA|} = \lambda.$$

Leia nelinurkade $KLMN$ ja $ABCD$ pindalade suhe.

4. Kosmoserändurid, kes olid kaua maailmaruumis Imede riiki otsinud, leidsid järjekordse planeedi ja laskusid sellele. Nad said kontakti seal elavate pärismaalastega, kes teatasid, et rändurite poolt otsitud Imede riik asub nende planeedil, ja andsid ränduritele ka planeedi täpse kaardi. Rändurid said teada, et nad on maandunud linnas, mis on kogu planeedi keskus, kuid see linn ei asu Imede riigis. Nad said ka teada, et planeedi linnad on seotud sellise ühesuunaliste teede võrguga, mis võimaldab sõita keskusest planeedi mistahes linna, läbides teel lõpliku arvu linnu. Seejuures ei vii keskusesse sisse ühtegi teed, igasse ülejäänud linna viib aga sisse täpselt 1 tee. Iga linn sellel planeedil asub täpselt ühes riigis ning kui T_1 ja T_2 on mistahes ühe ja sama riigi linnad, siis linnast T_1 väljuvad teed viivad samade riikide linnadesse nagu linnast T_2 väljuvad teedki.
 - a) Tõesta, et kui Imede riigis leidub linn, siis saab sinna keskusest sõita nii, et teel läbitakse igast riigist ülimalt üks linn.
 - b) Legend pajatab, et pärismaalased ei lubanud ränduritel niisama lihtsalt Imede riiki sõita, vaid esitasid tingimuse, mille kohaselt võivad rändurid valida oma teel korraga vaid ühe linna, kuhu järgmisena sõita. Seejärel määravad pärismaalased linna, kuhu rändurid peavad järgmisena sõitma, siis on valikuõigus jällegi ränduritel ja nii kordamööda edasi. Pole teada, kumb pooltest määras esimese linna, kuhu rändurid pidid keskusest sõitma. Tõesta, et kui ränduritel on võimalik jõuda Imede riiki pärismaalaste suvalise taktika korral, siis on ränduritel võimalik pärismaalaste suvalise taktika korral jõuda Imede riiki ka nii, et kõik ühe ja sama poole (rändurite või pärismaalaste) valitud linnad läbitud teel asuvad erinevates riikides.