30. nov. treeningvõistluse ülesannete lahendused

1. Olgu $l_1, l_2, \ldots, l_k$ vaadeldava murdjoone lülid ja a_i, b_i lüli l_i projektsioonide pikkused vastava tahu servadele (millel lüli l_i asub).

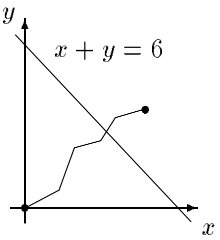
   Vaatleme murdjoone nende lülide projektsioone, mis on paralleelsed kuubi ühe fikseeritud servaga. Et murdjoon läbib kuubi mõlemat selle servaga ristiolevat tahku, siis on vastavate projektsioonide pikkuste summa vähemalt 2. Korrates seda arutelu kuubi kahe ülejäänud vastastahkude paari jaoks, saame kokkuvõttes

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + b_1 + b_2 + \ldots + b_k \geqslant 6\ .$$

   Näitame, et sellest võrratusest järeldub ülesandes nõutud võrratus

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant 3\sqrt{2}\ .$$

   Selleks vaatleme koordinaattasandil k lüliga murdjoont, mille alguspunkt on koordinaatide alguspunktis ja mille lülide (kui vektorite) koordinaadid on (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_k, b_k). (vt. joonist 1). Selle murdjoone lõpp-punkt asub siis ülalpool sirget $x + y = 6$ (või sellel sirgel), selle sirge kaugus koordinaatide alguspunktist on aga $3\sqrt{2}$.



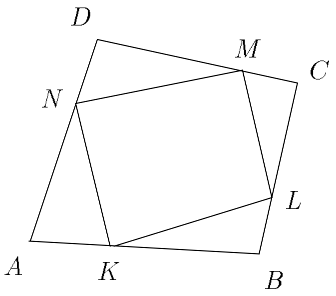
Joonis 1

   Märkus: Leidub ülesande tingimusi rahuldav murdjoon, mille pikkus on täpselt $3\sqrt{2}$. Milline see murdjoon on?

2. Väite õigsus on ilmne, kui $x_1 = 0$, $x_n = 1$ või $n = 2$. Olgu nüüd $x_1 \neq 0$, $x_n \neq 1$ ja $n \geqslant 3$. Oletame vastuväiteliselt, et iga $i = 1, \ldots, n-1$ korral kehtib vastupidine võrratus $x_i(1 - x_{i+1}) < \frac{1}{4}x_1(1 - x_n)$. Siis $i = 1$ ja $i = n - 1$ korral saame vastavalt $4x_2 - 3 > x_n$ ja $x_{n-1} < \frac{1}{4}x_1 \leqslant \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Kuna $x_{n-2}(1 - x_{n-1}) \leqslant \frac{1}{4}x_1(1 - x_n) < \frac{1}{4}$, siis $x_{n-2} < \frac{1}{4(1 - x_{n-1})} < \frac{1}{2}$. Selliselt edasi arutledes saame $x_{n-3} < \frac{1}{2}$, $x_{n-4} < \frac{1}{2}$, $\ldots$, $x_2 < \frac{1}{2}$, mis koos võrratusega $x_n < 4x_2 - 3$ annab $x_n < -1$, vastuolu.

3. Arvutame kolmnurkade AKN, BLK, CML ja DNM pindalad (vt. joonist 2):

$$S_{AKN} = \frac{1}{2}\lambda AB \cdot (1 - \lambda)AD \cdot \sin\angle DAB = \lambda(1 - \lambda)S_{ABD}\ ,$$
$$S_{BLK} = \frac{1}{2}\lambda BC \cdot (1 - \lambda)BA \cdot \sin\angle ABC = \lambda(1 - \lambda)S_{BCA}\ ,$$
$$S_{CML} = \frac{1}{2}\lambda CD \cdot (1 - \lambda)CB \cdot \sin\angle BCD = \lambda(1 - \lambda)S_{CDB}\ ,$$
$$S_{DNM} = \frac{1}{2}\lambda DA \cdot (1 - \lambda)DC \cdot \sin\angle CDA = \lambda(1 - \lambda)S_{DAC}\ .$$



Joonis 2

Lahutades nelinurga $ABCD$ pindalast nende nelja kolmnurga pindala ning arvestades, et $S_{ABD} + S_{BCA} + S_{CDB} + S_{DAC} = 2S_{ABCD}$, saame

$$S_{KLMN} = S_{ABCD} - 2\lambda(1-\lambda)S_{ABCD} \ ,$$

millest

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 \ .$$

4. Nimetame tingimust, mille kohaselt ühe riigi mistahes kahest linnast väljuvad teed viivad samade riikide linnadesse, *regulaarsuse tingimuseks.* Ülesande püstituse põhjal rahuldab vaadeldava planeedi iga riik regulaarsuse tingimust.

   a) Leidugu Imede riigis linn, siis saab sinna ülesande tingimuste kohaselt keskusest sõita. Oletame vastuväiteliselt, et mistahes viisil keskusest Imede riiki sõites tuleb mõnest riigist rohkem kui üht linna läbida. Olgu $r_0, \ldots, r_l$ mingi lühim linnade jada, kus r_0 on keskus, r_l asub Imede riigis ning iga $i = 1, \ldots, l$ korral leidub tee linnast r_{i-1} linna r_i . Olgu $R_0, \ldots, R_l$ vastav riikide jada (iga $i = 0, \ldots, l$ korral asub linn r_i riigis R_i). Vastuväitelise oletuse põhjal leiduvad sellised indeksid $i < j$, $0 \leqslant i, j \leqslant l-1$, et $R_i = R_j$. Regulaarsuse tingimusest saame, et leidub linnade jada $r'_{j+1}, \ldots, r'_l$, nii et iga $k = j+1, \ldots, l$ korral linn r'_k asub riigis R_k ning leiduvad teed linnast r_i linna r'_{j+1} ja iga $k = j+1, \ldots, l-1$ korral linnast r'_k linna r'_{k+1} . Et linn r'_l on Imede riigis, oleme leidnud algul mainitust lühema tee keskusest sinna, vastuolu. Sellega on väide tõestatud.

   b) Tõestame kõigepealt

   Lemma: *Olgu M juhuslike käikudeta täisinformatsiooniga kahe isiku positsioonimäng, milles reeglitega lubatud käikude hulk sõltub ainult seisust ja sellest, kumb mängija on käigul (mitte aga sellest, kuidas selle seisuni on jõutud). Kui ühel mängijaist leidub mängus M võitev strateegia, siis leidub tal ka selline võitev strateegia, et vastase mistahes vastumängu korral on kõik ühe ja sama mängija käigul olles tekkivad seisud paarikaupa erinevad.*

   Tõestus: Leidugu ühel mängijaist, olgu see A , mängus M võitev strateegia, kuid oletame vastuväiteliselt, et mängija A iga võitva strateegia jaoks leidub mängijal B vastumäng, mille korral partiis vähemalt üks seis ühe ja sama mängija käigul olles kordub. Siis leidub mängijal B mängija A iga võitva strateegia jaoks ka selline vastumäng, mille korral kordub partiis vähemalt üks seis mängija A käigul olles, sest mängija B võib enda käigul olles teha samas seisus sama käigu.

   Mängija A suvalise strateegia S ja mängija B suvalise strateegia T jaoks tähistagu $\mathcal{P}(S,T)$ partiid, mis mängitakse, kui A kasutab strateegiat S ja B strateegiat T , ning mängija B suvalise strateegiate hulga $\mathcal{T}$ jaoks olgu

$$\mathcal{P}(S,\mathcal{T}) = \{\, \mathcal{P}(S,T) \mid T \in \mathcal{T} \,\} \ .$$

Mängija A suvalise strateegia S jaoks tähistagu $\mathcal{U}(S)$ mängija B selliste strateegiate T hulka, mille korral esineb partiis $\mathcal{P}(S,T)$ mingi seisu kordumine mängija A käigul olles. Tähistagu veel $\mathcal{W}$ mängija A kõigi võitvate strateegiate hulka. Tehtud vastuväiteline eeldus tähendab siis seda, et mistahes strateegia $S \in \mathcal{W}$ korral hulk $\mathcal{U}(S)$ ei ole tühi.

Tähistame suvalise partii P käikude arvu $l(P)$ ja defineerime mängija A iga võitva strateegia $S \in \mathcal{W}$ jaoks arvu

$$u(S) = \max_{P \in \mathcal{P}(S,\mathcal{U}(S))} l(P) = \max_{T \in \mathcal{U}(S)} l(\mathcal{P}(S,T)) .$$

(s.t. $u(S)$ on käikude arv pikimas partiis, milles mängija A kasutab strateegiat S ja milles mingi seis kordub mängija A käigul olles). Olgu $S_0 \in \mathcal{W}$ mängija A mingi selline võitev strateegia, mille korral $u(S_0) = \min_{S \in \mathcal{W}} u(S)$. Konstrueerime selle alusel uue strateegia $S_0' \in \mathcal{W}$, mille korral $u(S_0') < u(S_0)$ — saadav vastuolu strateegia S_0 minimaalsusega tõestabki siis lemma väite.

Selleks defineerime suvalise mängija B käiguga lõppeva partiialguse a jaoks hulga $\mathcal{K}(a)$ kui kõikide nende partiide hulga, mille algus on a , milles mängija A kasutab strateegiat S_0 ning milles alguse a järel laual olev seis kordub veel hiljem mängija A käigul olles. Paneme tähele, et $\mathcal{K}(a) \subseteq \mathcal{P}(S_0,\mathcal{U}(S_0))$. Defineerime nüüd strateegia S_0' (suvaline partiialguse a jaoks, mille järel mängija A on käigul) järgmiselt.

1) Kui partiialguse a suvalise pärisalguse a' (mille järel mängija A on käigul!) korral $\mathcal{K}(a') = \emptyset$, siis juhul $\mathcal{K}(a) = \emptyset$ nõudku strateegia S_0' mängijalt A alguse a järel sama käiku nagu strateegia S_0 nõuab sama alguse a järel, juhul $\mathcal{K}(a) \neq \emptyset$ aga nõudku strateegia S_0' alguse a järel seda käiku, mis tuleks strateegia S_0 järgi teha hulga $\mathcal{K}(a)$ mingis partiis alguse a järel tekkinud seisu mingil hilisemal kordumisel.

2) Kui leidub alguse a pärisalgus a' , mille korral $\mathcal{K}(a') \neq \emptyset$, siis olgu a_0 sellistest partii a pärisalgustest lühim — siis on strateegia S_0' kohane mängija A käik alguse a_0 järel määratud eelmise punkti teise poole põhjal (s.t. selleks on käik, mis tehakse hulga $\mathcal{K}(a_0)$ mingis partiis P alguse a_0 järel tekkinud seisu mingil kordumisel). Olgu $\bar{a}$ partii P algus mainitud kordumiseni — siis nõuame strateegias S_0' mängijalt A partiialguse a järel sama käiku, mida strateegia S_0 nõuab partiialguse $\bar{a}$ järel.

On üsna ilmne, et kuna strateegia S_0 on võitev, on ka strateegia S_0' võitev. Vaatleme partiisid $P = \mathcal{P}(S_0,T)$ ja $P' = \mathcal{P}(S_0',T)$, kus T on mängija B suvaline strateegia hulgast $\mathcal{U}(S_0')$. Näitame, et partiis P' leidub algus b , nii et $\mathcal{K}(b) \neq \emptyset$. Kui $P' \neq P$, siis on see strateegia S_0' konstruktsiooni põhjal ilmne. Kui aga $P' = P$, siis $T \in \mathcal{U}(S_0)$ ja alguseks b võime võtta partii $P = P'$ suvalise alguse, mille tulemusena saadav seis selles partiis hiljem kordub.

Olgu b_0 partii P' sellistest algustest (mille korral $\mathcal{K}(b) \neq \emptyset$) lühim. Siis strateegia S_0' konstruktsiooni põhjal on b_0 ka partii P algus (sest esimene erinevus partiide P ja P' vahel saab tekkida alles pärast seda, kui mingi nende ühise alguse c jaoks on hulk $\mathcal{K}(c)$ olnud mittetühi). Seega leidub hulgas $\mathcal{K}(b_0)$ partii $\bar{P}$, milles alguse b_0 järel tekkinud seisu kordumisel tehtud käik tehakse partiis P' alguse b_0 järel. Olgu $\bar{b}$ partii $\bar{P}$ algus mainitud kordumiseni. Siis hulga $\mathcal{K}(b_0)$ definitsiooni põhjal leiduvad hulgas $\mathcal{K}(b_0)$ ja seega ka hulgas $\mathcal{P}(S_0,\mathcal{U}(S_0))$ kõikvõimalikud partiid algusega $\bar{b}$, milles mängija A mängib strateegiaga S_0 . Strateegia S_0' definitsiooni põhjal leidub nende partiide hulgas ka selline partii P'' , milles mängija B mängib pärast algust $\bar{b}$ nii, nagu partiis P' pärast algust b_0 . Siis $l(P') < l(P'')$ ja seega $l(\mathcal{P}(S_0',T)) = l(P') < u(S_0)$. Et strateegia T oli valitud hulgast $\mathcal{U}(S_0')$ suvaliselt, siis $u(S_0') < u(S_0)$.

Vaatame nüüd ülesande b) osas kirjeldatud situatsiooni kahe isiku positsioonimänguna, mida mängivad omavahel rändurid ja pärismaalased. Loeme seisuks riigi, kus rändurid asuvad, ning rändurite ja pärismaalaste käikudeks vastavalt rändurite- või pärismaalastepoolse linnavaliku ja valitud linna sõitmise. Rändurid võidavad, kui jõuavad Imede riiki. Regulaarsuse tingimus tähendab selles interpretatsioonis täpselt seda, et võimalike käikude hulk sõltub ainult mängu seisust. Seega on täidetud lemma eeldused ning saame öelda, et kui ränduritel leidub võitev strateegia, siis leidub neil ka selline võitev strateegia, mille korral nii kõik rändurite käigul tekkivad seisud kui ka kõik pärismaalaste käigul tekkivad seisud on paarikaupa erinevad. Arvestades meie interpretatsiooni olemegi saanud ülesande lahenduse.