

# Ülesandeid koduseks lahendamiseks

1. komplekt

5. aprill 2000. a.

**Ülesanne 1.** Olgu  $ABC$  kolmnurk küljepikkustega  $a, b, c$  ja vastavate nurkadega  $\alpha, \beta, \gamma$ . Tõesta, et kui  $\alpha = 3\beta$ , siis  $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$  ning tee kindlaks, kas kehtib ka vastupidine järeldus.

**Ülesanne 2.** Korrapärase  $(2n + 1)$ -nurga ( $n \geq 1$ ) iga külge ja iga diagonaal on värvitud kas punaseks või siniseks. Igal sammul saab valida ühe tipu ning seejärel peab muutma kõikide sellest tipust väljuvate lõikude värvi (punasest siniseks ja vastupidi). Tõesta, et iga algse tippude värvimise korral on võimalik jõuda olukorrani, kus igast tipust väljuvate siniste lõikude arv on paaris. Tõesta, et saadud värvimine on üheselt määratud algse värvimise poolt.

**Ülesanne 3.** Tetraeder  $ABCD$  on jagatud viieks kumeraks hulktahukaks nii, et iga  $ABCD$  tahk on tahuks ühele nendest hulktahukatest (ühtki tahku ei jagata osadeks) ning iga kahe saadud hulktahuka ühisosa on kas ühine tipp, ühine serv või ühine tahk. Milline on viie hulktahuka tahkude arvude summa vähim võimalik väärtus?

**Ülesanne 4.** Tõesta, et leidub lõpmatu kasvav naturaalarvude jada  $(a_n)$  nii, et iga  $k \geq 0$  korral sisaldab jada  $(k + a_n)$  ainult lõpliku arvu algarve.

**Ülesanne 5.** Leia iga  $n \geq 2$  korral avaldise

$$V_n = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \dots + \sin x_n \cos x_1$$

suurim võimalik väärtus, kui  $x_1, x_2, \dots, x_n$  on suvalised reaalarvud.

**Ülesanne 6.** Olgu  $ABCD$  selline rööpkülik, et kolmnurk  $ABD$  on teravnurkne ja  $\angle BAD = \pi/4$ . Rööpküliku külgedel  $AB, BC, CD$  ja  $DA$  saab mitmel erineval moel valida vastavalt punktid  $K, L, M$  ja  $N$  nii, et  $KLMN$  on kõõlnelinurk, mille ümberringjoone raadius on võrdne kolmnurkade  $ANK$  ja  $CLM$  ümberringjoonte raadiustega. Leida selliste kõõlnelinurkade  $KLMN$  diagonaalide lõikepunktide lookus (kõikide selliste punktide hulk, kus võib asuda  $KLMN$  diagonaalide lõikepunkt).