Algarvujärjendite ülesannete lahendused ja vihjed

1. Sobib nt järjend $3, 5, 7$.

2. Sobib nt järjend $5, 11, 17, 23$.

3. Olgu antud kolmeelemendiline algarvudest koosnev aritmeetiline järjend $a, a + d, a + 2d$, kus d on paaritu naturaalarv. Vaatame läbi kaks juhtu. Kui a on paaritu, siis peab $a + d$ olema paaris, kuid et ainus paaris algarv on vähim algarv 2, ei saa a enam algarv olla. Kui a on paaris (ja seega võrdne 2-ga), on ka $a+2d$ paarisarv. Mõlemal juhul oleme saanud vastuolu. Järelikult peab d olema paarisarv.

4. Sobib nt järjend $5, 11, 17, 23, 29$.

5. Selle ülesande võib lahendada analoogiliselt 3. ülesandega, vaadates läbi erinevad jäägiklassid mooduli 3 järgi arvude a ja d jaoks.

6. Üldistame veidi ülesannetes 3 ja 5 esinenud arutelusid. Vaatleme jäägiklasse mooduli p järgi ning paneme tähele järgmist fakti. Kui meil on arv $d \neq 0 \ (mod\, p)$, siis tema $1, 2, \ldots, p$ kordsed annavad kõikvõimalikud jäägid mooduli p järgi. Teiste sõnadega

$$\{b \cdot d \ (mod\, p) : \ b = 1, 2, \ldots, p\} = \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Tõepoolest, kohe on selge, et vasakpoolne hulk sisaldub parempoolses. Oletame nüüd, et see sisaldumine on range, st leidub element hulgast $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, mis ei avaldu kujul $b \cdot d$. Siis aga peab kahele b väärtusele vastama sama jääk, st leiduma erinevad b_1 ja b_2 nii, et $p \geq b_1 > b_2 \geq 1$ ja $b_1 \cdot d = b_2 \cdot d \ (mod\, p)$. Siit saame $(b_1 - b_2) \cdot d = 0 \, (mod\, p)$, mis on võimatu, sest ei $b_1 - b_2$ ega d ei jagu meie eelduse põhjal algarvuga p. Lisaks paneme tähele, et $b \cdot p = 0 \, (mod\, p)$ parajasti siis, kui $b = p$.
Vaatleme nüüd aritmeetilist järjendit $a, a+d, a+2d, \ldots$, kus $a \neq 0 \ (mod\, p)$. Veendume, et a-le tuleb vahet d liita vähem kui p korda, et saada p-ga jaguv arv (mis ei saa järelikult olla algarv). Tõepoolest, olgu $\overline{a}$ arvu a jääk jagamisel p-ga, siis saavutamaks jaguvust p-ga, tuleb a-le lisada jääk $p - \overline{a} \in \{1, \ldots, p-1\}$. Vastavalt ülal tehtud tähelepanekule leidub selline $b \in \{1, 2, \ldots p-1\}$, et $b \cdot d = p - \overline{a} \, (mod\, p)$. Järelikult jagub järjendi liige $a + b \cdot d$ arvuga p ega saa seega olla algarv. Näeme, et vaadeldavas järjendis

võib olla kokku ülimalt b algarvu.
Kui $a = 0 \ (mod\, p)$, siis võivad põhimõtteliselt kõik arvud $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(p-1)\cdot d$ olla algarvud, arv $a+p\cdot d$ aga enam mitte. Olemegi saanud algarvudest koosneva aritmeetilise järjendi pikkuse ülemiseks tõkkeks p.

7. Selle väite tõestuse võib saada järeldusena eelmisest väitest – kuna ilmselt peab leiduma algarv, millega järjendi vahe ei jagu, siis ei saa järjendi pikkus ületada seda algarvu.
   Alternatiivse tõestuse võib anda kasutades fakti, et iga naturaalarvu k jaoks ledub k järjestikust täisarvu, mis on kõik kordarvud. (Tõesta see väide ning järelda sellest 7. ülesande tõestus iseseisvalt!)

8. Eelnevast teeme järelduse, et niisuguse järjendi vahe peab jaguma algarvudega 2, 3 ja 5 ehk teisisõnu arvuga 30. Esimeseks sobivaks näiteks on $7, 37, 67, 97, 127, 157$.

9. Selle ülesande eest said täispunktid kõik, kes olid programmi kirjutanud ning leidnud vähemalt kümneelemendilise järjendi. See polnudki nii raske!