Vastused ja lahendused (Tähtaeg: 15. veebruar)

1. $Vastus: \frac{7}{9} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8}$
   Lahendus: Tingimustest järeldub, et

   $$2 \leqslant a_i, b_i \leqslant 8 \text{ ja } a_i < b_i, \ \text{ iga } i = 1, 2, 3, 4 \text{ korral.}$$

   Tingimust $\frac{7}{9} < \frac{a_i}{b_i} < \frac{8}{9}$ täitvatest võimalikest murdudest vähim on $\frac{4}{5}$ ja $\frac{7}{8}$ suurim. Nende vahel paikneb vaid kaks sobivat murdu $\frac{5}{6}$ ja $\frac{6}{7}$.
   Märkus: Murdude võrdlemisel on sobiv kasutada võrratust

   $$\frac{a-1}{a} < \frac{a}{a+1}, \text{ kui } a > 0.$$

2. $Vastus: \ a = b = c = d = e = 400$.
   Lahendus: Korrutades teise võrduse mõlemaid pooli arvuga 2, saame võrduse esitada kujul

   $$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-a)^2 = 0,$$

   mis saab õige olla vaid juhul kui $a = b = c = d = e$. Esimesest võrdusest saame nüüd, et $a = b = c = d = e = 400$.
   Märkus: Kasutatud teisendus kuulub nn. klassikasse. Uuri mitme suuruse korral on see kasutatav.

3. $Vastus: (x; y; z) = (2; 2; 5)$
   Lahendus: Paneme tähele, et x^y ja z on erineva paarsusega. Paarisarvude seas on vaid üks algarv so. 2. Vaatame juhtumeid:

   (a) kui $z = 2$, siis $x^y = 1$, mis ilmselt algarvude x ja y korral on võimatu.

   (b) kui $x = 2$, siis saame võrrandi $2^y + 1 = z$ vaatlemisel omakorda kaks juhtu:

      i. kui ka $y = 2$, siis $z = 5$ ja ongi üks sobiv kolmik $(2; 2; 5)$ leitud

      ii. kui y on paaritu arv, siis osutub z alati arvu 3 kordseks. Tõepoolest, kui $y = 2k + 1, k \geqslant 1$, siis

      $$z = 2^{2k+1} + 1 = 2 \cdot 4^k + 1,$$

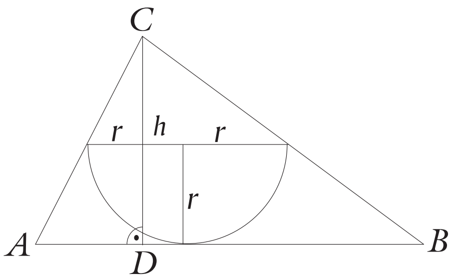
      mis annab iga $k \geqslant 1$ korral jagamisel kolmega jäägi 0 ning on ka suurem arvust 3.(Juhtum $k = 0$ ehk $y = 1$ ei sobi.)

4. $Vastus:$ $a_{10} = 8$, $a_{1999} = 1$
Lahendus: Antud eeskirja põhjal arvutame $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 7$, $a_6 = 5$, $a_7 = 1$, $a_8 = 2$, . . . jne. Paneme tähele, et arvud hakkavad korduma. Seega saame eeskirja , $a_{6k+r} = a_r$, mille kohaselt $a_{10} = a_4 = 8$ ja $a_{1999} = a_{6\cdot 333+1} = a_1 = 1$.

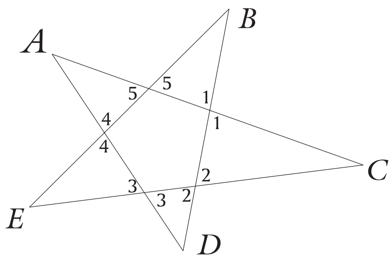
5. $Vastus: r = \dfrac{ah}{2h+a}$.
Kuna $AB \| KL$, siis $\triangle CKL \sim \triangle CAB$, millest $\dfrac{h-r}{h} = \dfrac{2r}{a}$.

Seega $r = \dfrac{ah}{2h+a}$.

Märkus: Sama tulemuseni võib jõuda näiteks pindalade meetodit kasutades. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle KLC} + S_{ABLK}$, kus $ABLK$ on trapets.



6. $Vastus:$ Nurkade summa on $180°$.
Lahendus: Tähtviisnurk koosneb viiest kolmnurgast ja ühest kumerast viisnurgast. Paneme tähele, et kolmnurkade "alusnurgad" $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ ja $\angle 5$ on ühtlasi kumera viisnurga välisnurkadeks, mille summa on iga kumera hulknurga korral $360°$. Seega liites viie kolmnurga sisenurkade suurused, saame võrduse $5 \cdot 180° = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + 2 \cdot 360°$, millest otsitavate nurkade summa
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 5 \cdot 180° - 2 \cdot 360° = 180°$.



7. $Vastus:$ Ristküliku mõõtmed $x \times y$, kus

$$x = a \cdot \frac{10 \pm \sqrt{100-2p}}{20}, \; y = h \cdot \frac{10 \mp \sqrt{100-2p}}{20}.$$

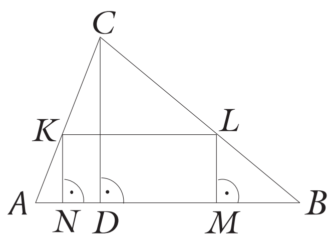
Arvu p suurim võimalik väärtus on $p = 50$.
Lahendus: Olgu ristküliku $KLMN$ mõõtmed $|KL| = |MN| = x$ ja $|LM| = |KN| = y$. Kuna $(S_{KLMN} : S_{ABC}) \cdot 100\% = p\%$, siis

$$xy = \frac{ahp}{200}. \tag{1}$$

Kolmnurkade ABC ja KLC sarnasusest järeldub, et $x = \frac{a}{h}(h - y)$, mille asendamisel seosesse (1) tekib ruutvõrrand $200y^2 - 200hy + ph^2 = 0$. Lahendades selle võrrandi muutuja y suhtes, saame

$$y_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 2p}}{20} \cdot h \quad \text{ja} \quad x_{1,2} = \frac{10 \mp \sqrt{100 - 2p}}{20} \cdot a.$$

Ülesanne on lahenduv vaid juhul kui $100 - 2p \geqslant 0$, st. kui $p \leqslant 50$. Suurim võimalik p väärtus on seega $p = 50$, mille korral $x = \frac{a}{2}$ ja $y = \frac{h}{2}$.



8. *Vastus* : Landias
Lahendus: Tuleb läbi vaadata 2 juhtumit:

(a) järgmine võistlus toimub Skandias. Seega eeldame, et Skandias on seni peetud 5 mängu, Landias aga 6 . Oletame, et Skandia on omal maal võitnud x mängu ja koostame vastava tabeli võitude kohta.

võite	Skandia(5-st mängust)	Landia(6-st mängust)
kodus	x	$x - 1$
võõrsil	$7 - x$	$5 - x$

Seega võõrsil on saavutatud võite kokku $7 - x + 5 - x = 5$, millest $x = 3,5$. Võite ei saa olla $3,5$. Seega ei saa toimuda 12. mäng Skandias.

(b) järgmine mäng toimub Landias. Koostame analoogilise tabeli.

võite	Skandia(6-st mängust)	Landia(5-st mängust)
kodus	x	$6 - x$
võõrsil	$7 - x$	$x - 2$

Seega võõrsil on peetud mängudest võidetud $7 - x + 6 - x = 5$, millest $x = 4$. Kontroll näitab, et sel juhul on kooskõla ülesande tingimustega saavutatud. Järelikult toimub järgmine mäng Landias.