Kodused ülesanded 1997/98 õppeaastal, 4. komplekt

Ülesanded ja lahendused

1. Kas tasandil leidub selline n punktist $(n \geqslant 3)$ koosnev hulk A, et
   a) ükski hulka A kuuluvate punktide kolmik ei asu ühel sirgel;
   b) mistahes kolme hulka A kuuluva punkti korral on ka läbi nende punktide joonestatud ringjoone keskpunkt hulgas A?

   Vastus: ei leidu.

   Lahendus: Oletame, et nõutud omadustega hulk A leidub, ning valime sellest hulgast punktid C ja D nii, et lõigu CD pikkus on võimalikest vähim. Kuna ülesande tingimuste põhjal leidub hulgas A punkt E, mis ei asu sirgel CD, siis paikneb lõigu CD keskristsirgel r vähemalt üks hulga A punkt (kolmnurga CDE ümberringjoone keskpunkt). Valime kõikide niisuguste punktide seast (mis sisalduvad ühtaegu hulgas A ja sirgel r) punkti P, mille kaugus sirgest CD on vähim.

   Kuna lõik CD oli valitud minimaalse võimaliku pikkusega, siis saame $|PC| = |PD| \geqslant |CD|$. Järelikult on kolmnurk PCD teravnurkne ning selle ümberringjoone keskpunkt O paikneb kolmnurga PCD sisepiirkonnas. Et punkt O kuulub nii hulka A kui ka sirgele r ning on sirgele CD lähemal kui punkt P, oleme saanud vastuolu.

2. Tasandil on antud 1997 punkti. Tõesta, et nende kõikvõimalike paaride vaheliste kauguste hulk sisaldab vähemalt 32 erinevat arvu.

   Lahendus: Oletame vastuväiteliselt, et antud 1997 punkti vahelised kaugused võivad omandada ülimalt 31 erinevat väärtust. Valime suvalise antud punkti O. Et $\dfrac{1996}{31} > 64$, peab leiduma 65 punkti, mis asuvad punktist O samal kaugusel, s.t. ühel ringjoonel keskpunktiga O. Olgu A suvaline neist punktidest. Kuna vaadeldaval ringjoonel saab punktist A samal kaugusel olla ülimalt 2 punkti, siis ei saa sellel ringjoonel paikneda rohkem kui $2 \cdot 31 + 1 = 63$ antud punkti — vastuolu.

3. Tasandil on antud n punkti ($n \geqslant 5$) nii, et ükski antud punktide kolmik ei asu ühel sirgel. Jaan ja Peeter mängivad järgmist mängu. Kordamööda valib kumbki neist kaks punkti, mis pole veel sirglõiguga ühendatud, ning ühendab need punktid sirglõiguga. Mäng lõpeb, kui iga punkt on vähemalt ühe lõigu otspunktiks, kusjuures võidab mängija, kes teeb viimase käigu. Jaan teeb esimese käigu. Leia kõik n väärtused, mille korral Jaan suudab võita Peetri suvalise vastumängu korral.

   Vastus: siis ja ainult siis, kui n annab neljaga jagamisel jäägi 1 või 2.

Lahendus: On selge, et varem või hiljem jõutakse mängu käigus olukorrani, kus leidub veel täpselt 1 või 2 antud punkti, mis ei ole ühegi tõmmatud lõigu otspunktiks. Seejuures mängija, kelle käigu järel selline seis tekkis, kaotab. Seega tagab Jaanile võidu järgmine taktika: kuni leidub veel vähemalt 3 punkti, millest ei lähtu ühtegi lõiku, teeb ta käike nii, et ka tema käigu järel oleks veel vähemalt 3 niisugust punkti (see on kindlasti võimalik juhul, kui $\binom{n-3}{2}$ on paaritu arv, s.t. kui n annab neljaga jagamisel jäägi 1 või 2); kui aga Jaani käiguks on niisuguseid punkte jäänud ainult 1 või 2 , jääb tal vaid üle teha võitev käik. On selge, et kui n annab neljaga jagamisel jäägi 0 või 3 , võib sama taktikat kasutada Peeter, järelikult suudab Jaan endale võidu kindlustada parajasti siis kui $n \equiv 1, 2 \pmod 4$.

4. Tasandil on antud 100 punkti nii, et ükski antud punktide kolmik ei asu ühel sirgel. Kahte punkti läbivat sirget nimetame antud punktisüsteemi *mediaaniks*, kui sellest mõlemale poole jääb sama arv punkte. Leia süsteemi mediaanide vähim võimalik arv ning too näide, mille korral see arv realiseerub.

   Vastus: mediaanide vähim arv on 50 .

   Lahendus: Paneme tähele, et iga antud punkt kuulub vähemalt ühele mediaanile. Tõepoolest, valime suvalise antud punkti A ning ühendame selle sirge abil mingi teise antud punktiga B . Kui sirge AB on mediaan, on meie väide tõestatud; vastasel juhul hakkame sirget ümber punkti A pöörama. Pärast pööret 180° võrra on sirge poolt määratud pooltasandid sirge suhtes oma kohad vahetanud. Samas paneme tähele, et vastavalt ülesande tingimustele saab punktiga A samal sirgel olla veel ülimalt üks antud punkt — seega lähevad pööramise käigus punktid ühelt pooltasandilt teisele üle ühekaupa ning järelikult peab leiduma hetk, kus pööratavål sirgel asub 2 antud punkti (üks neist A) ning see sirge jaotab ülejäänud antud punktide hulga kaheks võrdseks osaks.

   Seega peab mediaane olema vähemalt 50 . See arv realiseerub, kui antud punktideks võtta korrapärase 100-nurga tipud.

5. a) Sirgel l on antud n punast ja n sinist punkti. Tõesta, et sirgel l leidub selline punkt M , et punkti M ja punaste punktide vaheliste kauguste summa võrdub punkti M ja siniste punktide vaheliste kauguste summaga.

   b) Kas sarnane väide kehtib mistahes n punase ja n sinise punkti jaoks tasandil?

   Vastus: b) ei kehti.

Lahendus: a) Vaatleme sirget l kui koordinaattelge ning olgu punaste ja siniste punktide koordinaadid vastavalt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = |x - a_1| + \ldots + |x - a_n| - |x - b_1| - \ldots - |x - b_n| .$$

Olgu x_0 arv, mis on väiksem kõigist arvudest a_i ja b_j, ning x_1 arv, mis on kõigist neist arvudest suurem. Olgu $d = x_1 - x_0$, siis

$$\begin{aligned} f(x_1) &= |x_1 - a_1| + \ldots + |x_1 - a_n| - |x_1 - b_1| - \ldots - |x_1 - b_n| = \\ &= (x_1 - a_1) + \ldots + (x_1 - a_n) - (x_1 - b_1) - \ldots - (x_1 - b_n) = \\ &= (x_0 + d - a_1) + \ldots + (x_0 + d - a_n) - \\ &\quad - (x_0 + d - b_1) - \ldots - (x_0 + d - b_n) = \\ &= (x_0 - a_1) + \ldots + (x_0 - a_n) - (x_0 - b_1) - \ldots - (x_0 - b_n) = \\ &= -|x_0 - a_1| - \ldots - |x_0 - a_n| + |x_0 - b_1| + \ldots + |x_0 - b_n| = \\ &= -f(x_0) . \end{aligned}$$

Kuna funktsioon f on pidev ning selle väärtused lõigu $[x_0, x_1]$ otspunktides on erineva märgiga, peab sellel lõigul leiduma arv t, mille korral $f(t) = 0$. Arvule t vastav punkt M ongi ilmselt otsitav.

b) Kui $n = 1$ või $n = 2$, on väide ilmselt tõene. (Miks?) Kui aga $n \geqslant 3$, piisab kontranäite konstrueerimiseks vaadelda suvalist n-nurka. Värvides selle tipud punaseks ja külgede keskpunktid siniseks, on tasandi suvalise punkti X korral punkti X ja punaste punktide vaheliste kauguste summa suurem kui punkti X ja siniste punktide vaheliste kauguste summa. Seda on lihtne järeldada (kuidas?) järgmisest teoreemist: olgu kolmnurgas ABC külje BC keskpunkt E, siis $|AB| + |AC| > 2 \cdot |AE|$. (Tõesta see väide!)