Kodused ülesanded 1997/98 õppeaastal, 3. komplekt

Tähtaeg: 13. detsember 1997

1. Defineerime täisarvude jada $a_0, a_1, a_2, \ldots$ järgmiselt: olgu $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ning iga $n = 2, 3, \ldots$ korral olgu a_n vähim selline täisarv, mis on suurem arvudest $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ja ei moodusta aritmeetilist progressiooni ühegi paariga neist arvudest. Tõesta, et mistahes indeksi n korral langeb arvu a_n esitus kolmendsüsteemis kokku arvu n esitusega kahendsüsteemis.

2. Milliste positiivsete täisarvude k korral on tõene järgmine väide:
   Kui täisarvuliste kordajatega polünoom $F(x)$ rahuldab $c = 0, 1, \ldots, k+1$ korral tingimusi $0 \leqslant F(c) \leqslant k$, siis $F(0) = F(1) = \ldots = F(k+1)$.

3. Kumera nelinurga $ABCD$ diagonaalid AC ja BD lõikuvad punktis P. Olgu M nelinurga külje AB keskpunkt ning Q sirge MP lõikepunkt küljega CD. Tõesta, et punkt Q jaotab lõigu CD suhtes, mis on võrdne kolmnurkade BCP ja ADP pindalade suhtega.

4. Defineerime positiivsete täisarvude järjendid $R_1, R_2, R_3, \ldots$ järgmiselt: $R_1 = (1)$ ning kui $R_{n-1} = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, siis

   $$R_n = (1, 2, \ldots, x_1, 1, 2, \ldots, x_2, \ldots, 1, 2, \ldots, x_s, n),$$

   s.t. $R_2 = (1, 2)$, $R_3 = (1, 1, 2, 3)$, $R_4 = (1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 4)$, ... Tõesta, et:
   a) järjend R_n sisaldab parajasti 2^{n-1} elementi;
   b) järjendi R_n kõikide elementide summa on $2^n - 1$;
   c) mistahes $n > 1$ korral on järjendis R_n vasakult lugedes k. element võrdne ühega parajasti siis, kui paremalt lugedes k. element ei ole võrdne ühega.

Need ülesanded on valitud tänavu IMO-le ja Balti Teele pakutute hulgast — loodetavasti pakub nende lahendamine Sulle parajalt peamurdmist. Lahendused saada Täppisteaduste Kooli hiljemalt 13. detsembriks; samaks tähtajaks ootame Sinult ka Bratislava kaugõppekooli 3. komplekti (funktsiooniülesanded) lahendusi.

Jõudu tööle!