Valik ülesandeid erinevate maade olümpiaadidelt

Koostas Ülar Kahre

1. Tõesta, et leidub lõpmata palju positiivsete täisarvude kolmikuid (x, y, z) , mis rahuldavad võrrandit $x^x = y^3 + z^3$.

2. Tõesta, et kui positiivsete täisarvude m ja n jaoks kehtib võrdus $2m^2 + m = 3n^2 + n$, siis arvud $m - n$, $2m + 2n + 1$ ja $3m + 3n + 1$ on täisarvude ruudud.

3. Leia võrrandisüsteemi kõik täisarvulised lahendid:

$$\begin{cases} 2xy = t^2 - w^2 + z^2 \ ; \\ 2xz = t^2 - y^2 + w^2 \ ; \\ 2yz = t^2 - w^2 + x^2 \ . \end{cases}$$

4. *Pidev* funktsioon $f(x)$ rahuldab tingimusi $f(1000) = 999$ ja $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ iga reaalarvu x korral. Leia $f(500)$. (Funktsiooni $f(x)$ nimetame *pidevaks*, kui mistahes fikseeritud argumendi x_0 ja reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral saab leida niisuguse reaalarvu $\delta > 0$, et võrratusest $|x - x_0| < \delta$ järeldub võrratus $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Veidi lihtsustatult öeldes tähendab see, et funktsiooni $f(x)$ graafik kujutab endast pidevat joont.)

5. Punktid A, B, C paiknevad ringjoonel raadiusega r ja punkt D vastava ringi sisepiirkonnas, kusjuures $|AB| = |BC|$ ja kolmnurk BCD on võrdkülgne. Kiir AD lõikab ringjoont punktis E . Tõesta, et $|DE| = r$.

6. Punktid C ja D paiknevad poolringjoonel diameetriga AB . Olgu M kõõlu CD keskpunkt ja H punktist C diameetrile AB tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Tõesta, et kõõlu CD fikseeritud pikkuse korral ei sõltu nurga $\angle CHM$ suurus punktide C ja D asendist poolringjoonel.

7. Juku ja Juhan mängivad järgmist mängu. Kõigepealt kirjutab Juku tahvlile ühe nullist erineva numbri. Seejärel kirjutab Juhan ühe suvalise numbri Juku numbrist paremale, nii et tahvlile tekib kahekohaline arv. Edaspidi teevad mängijad käike vaheldumisi, kusjuures igal käigul sooritab mängija ühe järgmistest operatsioonidest:

   a) lisab tahvlil olevale arvule paremale poole ühe suvalise numbri;

   b) paigutab tahvlil oleva arvu numbrid ümber nii, et arv muutuks suuremaks.

   Mängu võidab see, kelle käigu järel on tahvlil esmakordselt suurem arv kui $1997\ldots1997$ (arv, milles numbrid 1997 korduvad 1997 korda). Kummal mängijatest on võitev strateegia?

8. Saturnlaste tähestikus on n tähte ning mistahes sõna saturnlaste keeles on ülimalt m tähe pikkune (mõni täht võib esineda sõnas ka rohkem kui üks kord). Seejuures ei lange saturnlaste keeles ükski sõna kokku mõne teise sõna algusega. Tähistagu a_k pikkusega k sõnade arvu saturnlaste keeles. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_m}{n^m} \leqslant 1 \ .$$