Kodused ülesanded 1997/98 õppeaastal, 2. komplekt

Ülesanded ja lahendused

1. Tõesta, et leidub lõpmata palju positiivsete täisarvude kolmikuid (x, y, z) , mis rahuldavad võrrandit $x^x = y^3 + z^3$.

   Lahendus 1: Antud võrrandit rahuldavad näiteks kolmikud $x = 27n^3 + 1$, $y = (27n^3 + 1)^{9n^3}$, $z = 3n \cdot (27n^3 + 1)^{9n^3}$, kus n on mistahes positiivne täisarv.

   Lahendus 2: Olgu k naturaalarv, mis annab kuuega jagades jäägi 4 või 5 . Siis arv $k \cdot 2^k$ annab kolmega jagades jäägi 1 ning arvud $x = 2^k$ ja $y = z = 2^{\frac{k \cdot 2^k - 1}{3}}$ rahuldavad ülesandes antud võrrandit.

2. Tõesta, et kui positiivsete täisarvude m ja n jaoks kehtib võrdus $2m^2 + m = 3n^2 + n$, siis arvud $m - n$, $2m + 2n + 1$ ja $3m + 3n + 1$ on täisarvude ruudud.

   Lahendus: Võrdusest $2m^2 + m = 3n^2 + n$ saame, et $m \neq n$ ja

   $$2m + 2n + 1 = \frac{n^2}{m - n} ; \qquad 3m + 3n + 1 = \frac{m^2}{m - n} . \tag{1}$$

   Siit omakorda $\frac{2m + 2n + 1}{3m + 3n + 1} = \left(\frac{n}{m}\right)^2$. Et arvud $2m+2n+1$ ja $3m+3n+1$ on ühistegurita (miks?), siis saab nende suhe olla ratsionaalarvu ruut ainult juhul, kui mõlemad arvud on täisarvude ruudud. Võrdustest (1) järeldame nüüd, et ka $m - n$ on täisarvu ruut (kui täisarvude x ja y korral $\frac{x^2}{y^2}$ on täisarv, siis jagub arv x arvuga y ning $\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$).

3. Leia võrrandisüsteemi kõik täisarvulised lahendid:

   $$\begin{cases} 2xy = t^2 - w^2 + z^2 ; \\ 2xz = t^2 - y^2 + w^2 ; \\ 2yz = t^2 - w^2 + x^2 . \end{cases}$$

   Vastus: ainus lahend on $x = y = z = w = t = 0$.

   Lahendus: Lahutades esimesest võrrandist kolmanda, saame tingimuse $(x - z)(x + z + 2y) = 0$. Edasi vaatleme eraldi kahte juhtu.

   a) Kui $x - z = 0$, s.t. $x = z$, saame kahe esimese võrrandi liitmisel $(x + y)^2 = 2t^2$ ehk $|x + y| = \sqrt{2} \cdot |t|$. Arvestades, et x, y ja t on täisarvud, saame ainsa võimalusena $t = 0$ ning $x = -y$. Esialgse süsteemi esimene võrrand omandab nüüd kuju $w^2 = 3x^2$, millest $|w| = \sqrt{3}|x|$ ning ainsa võimalusena $x = w = 0$. Kokkuvõttes saime niisiis $x = y = z = w = t = 0$, mis ilmselt ka rahuldab esialgset võrrandisüsteemi.

   b) Olgu nüüd $x + z + 2y = 0$, siis esimese võrrandi võime kirjutada kujul

   $$t^2 - w^2 = -(x + z)x - z^2 = -x^2 - xz - z^2$$

   ja teise võrrandi kujul

   $$t^2 + w^2 = 2xz + \frac{1}{4}(x + z)^2 .$$

   Liites nende võrrandite vastavad pooled, saame $2t^2 = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}z^2 + \frac{3}{2}xz$ ehk $-8t^2 = 3(x + z)^2$.

   Siit leiame $t = 0$ ja $x = -z$ ning arvestades eeldust $x + z + 2y = 0$ ka $y = 0$. Esialgse süsteemi teine võrrand teiseneb nüüd kujule $-2x^2 = w^2$, kust $x = w = 0$. Niisiis saime ka sel juhul ainsa võimalusena $x = y = z = w = t = 0$.

4. *Pidev* funktsioon $f(x)$ rahuldab tingimusi $f(1000) = 999$ ja $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ iga reaalarvu x korral. Leia $f(500)$. (Funktsiooni $f(x)$ nimetame *pidevaks*, kui mistahes fikseeritud argumendi x_0 ja reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral saab leida niisuguse reaalarvu $\delta > 0$, et võrratusest

$|x - x_0| < \delta$ järeldub võrratus $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Veidi lihtsustatult öeldes tähendab see, et funktsiooni $f(x)$ graafik kujutab endast pidevat joont.)

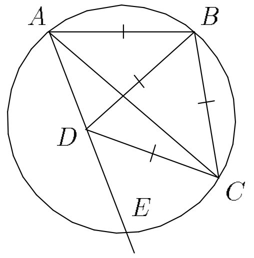
Vastus: $f(500) = \dfrac{1}{500}$.

Lahendus: Ülesande tingimusest saame, et $f(999) = f(f(1000)) = \dfrac{1}{f(1000)} = \dfrac{1}{999}$. Edasi kasutame asjaolu, et kui pidev funktsioon f rahuldab lõigu $[a, b]$ otspunktides tingimusi $f(a) = A$ ja $f(b) = B$, siis funktsioon f omandab lõigul $[a, b]$ ka mistahes väärtuse x , kus $A \leqslant x \leqslant B$ (või $B \leqslant x \leqslant A$, kui $B < A$). Kuna $\dfrac{1}{999} < 500 < 999$, siis vastavalt eelöeldule leidub lõigul $[999, 1000]$ selline punkt x_0 , et $f(x_0) = 500$. Niisiis $f(500) = f(f(x_0)) = \dfrac{1}{f(x_0)} = \dfrac{1}{500}$.

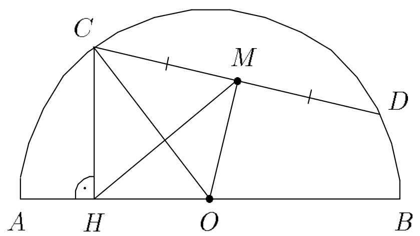
5. Punktid A, B, C paiknevad ringjoonel raadiusega r ja punkt D vastava ringi sisepiirkonnas, kusjuures $|AB| = |BC|$ ja kolmnurk BCD on võrdkülgne. Kiir AD lõikab ringjoont punktis E . Tõesta, et $|DE| = r$.

   Lahendus: Paneme esmalt tähele, et võrduste $|AB| = |BD| = |BC|$ ja ülesande tekstis määratud tingimuste tõttu punktide A, B, C ja D asukoha kohta peavad punktid D ja B paiknema ringjoone kõõlust AC erineval pool (vt. joonist 1).

   Olgu nüüd võrdhaarse kolmnurga ABC alusnurga suurus α , siis kolmnurga ABD alusnurga suurus on $\dfrac{\pi}{6}+\alpha$ ja seega $\angle CDE = \dfrac{\pi}{2}-\alpha$. Kõõlnelinurgast $ABCE$ ja kolmnurgast CDE saame vastavalt $\angle CED = 2\alpha$ ja $\angle DCE = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Rakendades siinuslauset kolmnurkades CDE ja ABC , leiame nüüd $|DE| = \dfrac{\sin \angle DCE}{\sin \angle CED} \cdot |CD| = \dfrac{\cos \alpha}{\sin 2\alpha} \cdot |CD| = \dfrac{|CD|}{2 \sin \alpha} = \dfrac{|CB|}{2 \sin \alpha} = r$.



Joonis 1



Joonis 2

6. Punktid C ja D paiknevad poolringjoonel diameetriga AB . Olgu M kõõlu CD keskpunkt ja H punktist C diameetrile AB tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Tõesta, et kõõlu CD fikseeritud pikkuse korral ei sõltu nurga $\angle CHM$ suurus punktide C ja D asendist poolringjoonel.

   Lahendus: Olgu O vaadeldava ringjoone keskpunkt. Et $\angle CMO = \angle CHO = 90^\circ$, siis on $CMOH$ kõõlnelinurk (vt. joonist 2). Piirdenurga omaduse kohaselt kehtivad seega võrdused $\angle CHM = \angle COM = \dfrac{1}{2}\angle COD$, kõõlule CD toetuva kesknurga $\angle COD$ suurus aga sõltub ainult kõõlu pikkusest ja mitte selle asendist ringjoonel.

7. Juku ja Juhan mängivad järgmist mängu. Kõigepealt kirjutab Juku tahvlile ühe nullist erineva numbri. Seejärel kirjutab Juhan ühe suvalise numbri Juku numbrist paremale, nii et tahvlile tekib kahekohaline arv. Edaspidi teevad mängijad käike vaheldumisi, kusjuures igal käigul sooritab mängija ühe järgmistest operatsioonidest:

   a) lisab tahvlil olevale arvule paremale poole ühe suvalise numbri;

   b) paigutab tahvlil oleva arvu numbrid ümber nii, et arv muutuks suuremaks.

   Mängu võidab see, kelle käigu järel on tahvlil esmakordselt suurem arv kui $1997 \ldots 1997$ (arv, milles numbrid 1997 korduvad 1997 korda). Kummal mängijatest on võitev strateegia?

Lahendus: Iga naturaalarvu x korral tähistagu $S(x)$ maksimaalset arvu, mis arvu x numbrite ümberpaigutamisel on võimalik saada. Nimetame arvu x *kinniseks*, kui $x = S(x)$, ja *kavalaks*, kui ainus suurem arv, mis arvust x numbrite ümberpaigutamisel on võimalik saada, on $S(x)$. Mistahes vähemalt kahekohalise arvu x korral tähistagu $l(x)$ vähimat numbrite arvu, mis tuleb arvu $S(x)$ lõppu lisada, et saada suurem arv kui $\underbrace{1997\ldots1997}_{4\cdot1997 \text{ numbrit}}$ (see vähim arv ei sõltu sellest, millised numbrid lisada). Ütleme, et arv x on *I liiki*, kui $l(x)$ on paaritu arv, ja *II liiki*, kui $l(x)$ on paarisarv. On selge, et kui arvus x esineb ühest suurem number, siis x on I liiki parajasti siis, kui ta sisaldab paaritu arvu numbreid, ja II liiki paarisarvu numbrite korral; kui aga arv x koosneb ainult numbritest 1 ja 0 , siis x on I liiki parajasti siis, kui ta sisaldab paarisarvu numbreid, ja II liiki paaritu arvu numbrite korral.

Näitame nüüd, et Jukul on võitev strateegia. Selleks tõestame kõigepealt järgmise

LEMMA. Olgu mängija M käigul olles tahvlil vähemalt kahekohaline arv x , mille korral $l(x) > 1$. Kui arv x on kaval, I liiki ning arvu $S(x)$ kaks viimast numbrit on võrdsed ja väiksemad kahest, või arv x on kinnine, II liiki ja selle kaks viimast numbrit on võrdsed ja väiksemad kahest, siis M kaotab vastase õige vastumängu korral.

Lemma tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub arve, mille korral lemma eeldused on täidetud, ent väide ei kehti — kõigist niisuguste arvude seast valime sellise x , mille korral $l(x)$ väärtus on minimaalne. Kui $l(x) = 2$, siis arv x on II liiki ning peab seega olema kinnine, seega peab M oma käigul lisama arvule x mingi numbri. Et $l(x) = 2$, siis M selle käiguga ei võida, kuid M vastane võidab, lisades veel ühe suvalise numbri.

Niisiis võime eeldada, et $l(x) > 2$. Vaatleme eraldi kaht võimalikku juhtu.

1) Olgu arv x kaval ja I liiki, kusjuures arvu $S(x)$ kaks viimast numbrit on võrdsed ja väiksemad kahest — olgu nendeks numbriteks aa . Kui mängija M paigutab arvus x numbrid ainsal võimalikul viisil ümber, siis tema vastasel tuleb lisada saadud arvu lõppu veel üks number a . Selle tulemusena tekib arv $y = S(x)a$, mis on kinnine, II liiki ja lõpeb numbritega aa . Seejuures $l(y) = l(x) - 1 > 1$, seega vastavalt arvu x valikule M kaotab. Jääb üle vaadelda juhtu, kui M lisab arvu x lõppu mingi numbri b .

1a) Kui $b < a$, siis kindlasti $a = 1$ ja $b = 0$. Kui $l(x) > 3$, siis mängija M vastasel tuleb lisada number 0 — seejärel tekkiv arv $y = x00$ on kaval (miks?), I liiki ning selle kaks viimast numbrit on võrdsed nulliga. Seejuures $l(y) = l(x) - 2 > 1$, seega M sellest seisust kaotab. Kui aga $l(x) = 3$, siis tuleb M vastasel paigutada numbrid ümber nii, et tekiks kinnine arv y . Siis $l(y) = 2$ ja M mistahes käigu korral vastane võidab järgmisel käigul.

1b) Kui $b \geqslant a$, siis on omakorda 2 võimalust:

1ba) Tekkiv arv xb on II liiki. Siis tuleb M vastasel paigutada numbrid ümber nii, et tekib arv $y = S(xb)$. See arv on kinnine, II liiki ja lõpeb numbritega aa . Seejuures $l(y) = l(x) - 1 > 1$, seega M sellest seisust kaotab.

1bb) Tekkiv arv xb on I liiki. Kui $l(x) > 3$, siis tuleb M vastasel paigutada numbrid ümber nii, et tekib kaval arv y (see on võimalik, sest antud juhul koosneb arv x ainult numbritest 1 ja 0 ning $b \geqslant 2$ — seega on numbrit b võimalik rohkem kui ühel viisil tõsta ettepoole nii, et arv suureneks). Saadav arv y on kaval, I liiki ning arvu $S(y) = S(xb)$ kaks viimast numbrit on aa . Seejuures $l(y) = l(x) - 2 > 1$, seega sellest seisust M jällegi kaotab. Kui aga $l(x) = 3$, siis tuleb M vastasel paigutada numbrid ümber nii, et tekkiv arv y oleks suurim võimalik nendest, mis ei alga numbriga b . Siis sõltumata sellest, kas M paigutab oma järgmisel käigul arvu numbrid ümber (nii, et saadav arv algab numbriga b) või lisab sellele mingi numbri, tuleb M vastasel lisada arvule veel üks number ja ta on võitnud.

2) Olgu nüüd arv x kinnine ja II liiki ning lõppegu numbritega aa , kusjuures $a = 0$ või $a = 1$. Arvu x kinnisuse tõttu on M sunnitud oma käigul sellele mingi numbri b lisama. Paneme ka tähele, et vaadeldaval juhul kindlasti $l(x) > 3$.

2a) Kui $b \leqslant a$, siis tuleb M vastasel lisada saadud arvu lõppu veel üks number b . Selle tulemusel saadav arv $y = xbb$ on kinnine, II liiki ja selle viimased kaks numbrit on bb . Seejuures $l(y) = l(x) - 2 > 1$, seega M sellest seisust kaotab.

2b) Kui $b > a$, siis on omakorda 2 võimalust:

2ba) Tekkiv arv xb on I liiki. Siis tuleb M vastasel paigutada oma käigul numbrid ümber nii, et tekiks kaval arv y (see on võimalik, sest viimast numbrit b on võimalik tõsta rohkem kui ühel viisil ettepoole nii, et arv suureneks). Tekkiv arv y on kaval, I liiki ja arvu $S(y) = S(xb)$ kaks viimast numbrit on aa . Seejuures $l(y) = l(x) - 1 > 1$, seega M sellest seisust kaotab.

2bb) Tekkiv arv xb on II liiki. Siis tuleb M vastasel paigutada numbrid ümber nii, et tekib arv $y = S(xb)$. See arv on kinnine, II liiki ja selle kaks viimast numbrit on aa . Seejuures $l(y) = l(x) - 2 > 1$, seega ka sellest seisust M kaotab.

Niisiis oleme näidanud, et M kaotab oma suvalise jätku korral. Saime vastuolu arvu x valikuga, ning sellega on lemma tõestatud.

Veendume nüüd, et alustajal, s.t. Jukul, tuleb võitmiseks kirjutada tahvlile arv 1 . Kui Juhan lisab numbri 0 või 1 , siis lisab Juku sama numbri ja tulemuseks on kinnine II liiki arv, mille kaks viimast numbrit on 11 või 00 . Seega lemma põhjal Juhan kaotab. Kui aga Juhan lisab mingi numbri $a > 1$, siis Juku lisab numbri 1 ja tulemuseks on kaval I liiki arv $1a1$, kusjuures arvu $S(1a1) = a11$ kaks viimast numbrit on 11 . Seega lemma põhjal jällegi Juhan kaotab.

8. Saturnlaste tähestikus on n tähte ning mistahes sõna saturnlaste keeles on ülimalt m tähe pikkune (mõni täht võib esineda sõnas ka rohkem kui üks kord). Seejuures ei lange saturnlaste keeles ükski sõna kokku mõne teise sõna algusega. Tähistagu a_k pikkusega k sõnade arvu saturnlaste keeles. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_m}{n^m} \leqslant 1 .$$

Lahendus: Iga saturnlaste keelde kuuluva sõna korral (pikkusega $k = 1, 2, \ldots, m$) vaatleme selle kõikvõimalikke *laiendeid* — tähejadasid pikkusega m , mille esimesed k tähte moodustavad vaadeldava sõna. Et saturnlaste keeles ei lange ükski sõna kokku mõne teise sõna algusega, siis erinevatest saturnlaste keelde kuuluvatest sõnadest saadud laiendite hulgad ei lõiku (ühtlasi järeldub sellest ka, et $k < m$ korral pole ükski niisugune laiend saturnlaste keele sõna). On ilmne, et iga sõna pikkusega k omab täpselt n^{m-k} laiendit ning n tähest saab moodustada kokku n^m erinevat tähejada pikkusega m . Summeerides kõikidele saturnlaste keele sõnadele vastavate laiendite arvud, saame niisiis võrratuse $a_1 \cdot n^{m-1} + a_2 \cdot n^{m-2} + \ldots + a_m \cdot 1 \leqslant n^m$, mille poolte jagamine arvuga n^m annabki ülesandes nõutud võrratuse.