Kodused ülesanded 1997/98 õppeaastal, 1. komplekt

Ülesanded ja lahendused

1. Ringjoone raadius on 15 ühikut ning punkt P asub 9 ühiku kaugusel selle keskpunktist. Mitu erinevat punkti P läbivat täisarvulise pikkusega kõõlu saab sellele ringjoonele tõmmata?

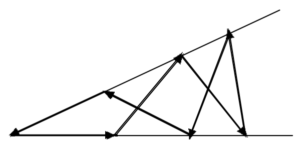
   Vastus: 12 .

   Lahendus: Olgu x mingi punkti P läbiva kõõlu kaugus ringjoone keskpunktist, siis selle kõõlu pikkus on $a = 2\sqrt{15^2 - x^2}$ (vt. joonist 1). Et ilmselt $0 \leqslant x \leqslant 9$, siis $a \leqslant 2\sqrt{15^2 - 0^2} = 30$ ja $a \geqslant 2\sqrt{15^2 - 9^2} = 24$. Seejuures on kõõlud pikkusega 30 ja 24 üheselt määratud (esimene neist on punkti P läbiv ringjoone diameeter ja teine kõõl, mis on selle diameetriga risti) ning iga vahepealse täisarvulise pikkusega on täpselt kaks kõõlu (mis on teineteise peegeldusteks mainitud diameetri suhtes). Et arvude 24 ja 30 vahel on 5 täisarvu, siis on ülesandes nõutud kõõlude koguarv $2 + 2 \cdot 5 = 12$.

2. Olgu k positiivne täisarv. Tõesta, et $2k+1$ on kordarv siis ja ainult siis, kui leiduvad niisugused positiivsed täisarvud m ja n , et $k = m + 2mn + n$.

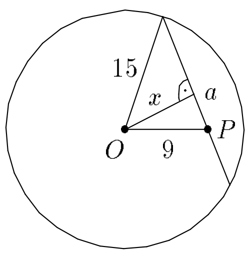
   Lahendus: Kui $k = m + 2mn + n$, siis $2k + 1 = 2m + 4mn + 2n + 1 = (2m + 1)(2n + 1)$ on ilmselt kordarv. Teiselt poolt, olgu $2k + 1 = ab$, kus a ja b on ühest suuremad täisarvud. Et arv $2k + 1$ on paaritu, siis peavad a ja b mõlemad olema paaritud arvud, s.t. $m = \dfrac{a-1}{2}$ ja $n = \dfrac{b-1}{2}$ on positiivsed täisarvud ning $m + 2mn + n = \dfrac{ab-1}{2} = k$.

3. Kirp teeb seitse ühepikkust hüpet, nagu näidatud kõrvaloleval joonisel, alustades hüppamist nurga tipust ja jõudes pärast seitsmendat hüpet sinna tagasi. Leia nurga suurus.

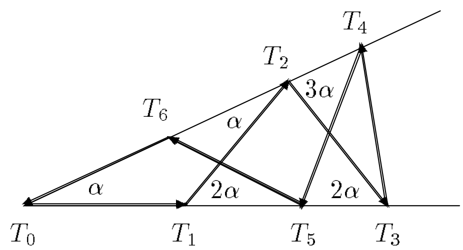


   Vastus: $\dfrac{\pi}{7}$.

   Lahendus: Olgu $T_0, T_1, \ldots, T_6$ kirbu järjestikuste hüpete alguspunktid (vt. joonist 2) ning olgu otsitava nurga $\angle T_4T_0T_3$ suurus α . Võrdhaarsetest kolmnurkadest $T_0T_1T_2$ ja $T_1T_2T_3$ leiame $\angle T_2T_3T_1 = \angle T_2T_1T_3 = \pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha$ ning $\angle T_4T_2T_3 = \pi - \alpha - (\pi - 4\alpha) = 3\alpha$. Et kolmnurgad $T_2T_3T_4$ ja $T_4T_0T_3$ on samuti võrdhaarsed, saame $\angle T_0T_3T_4 = \angle T_0T_4T_3 = \angle T_4T_2T_3 = 3\alpha$ ning $\alpha + 3\alpha + 3\alpha = \pi$, kust $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$.



Joonis 1



Joonis 2

4. Tasand läbib 27 ühikkuubist koosneva $3\times3\times3$ kuubi keskpunkti ja on risti ühega kuubi diagonaalidest. Mitut ühikkuupi see tasand lõikab?

Vastus: 19 . *Lahendus:* Paigutame kuubi koordinaatteljestikku nii, et selle üks tipp asub koordinaatide alguspunktis ja kuubi servad on paralleelsed koordinaattelgedega (vt. joonist 3). Kuubi ühe diagonaali otspunktideks on siis punktid $O(0,0,0)$ ja $P(3,3,3)$ ning selle diagonaaliga ristuva ja kuubi keskpunkti $M\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ läbiva tasandi võrrand on $x+y+z=\frac{9}{2}$. Paneme tähele, et igal suure kuubi koosseisus oleval ühikkuubil C_{ijk} on vaadeldava tasandiga ristuv diagonaal, mille otspunktid on $X_{ijk}(i,j,k)$ ja $Y_{ijk}(i+1,j+1,k+1)$ (igaüks indeksitest i, j, k omandab siin väärtused hulgast $\{0,\,1,\,2\}$). Seejuures vaadeldav tasand lõikab ühikkuupi C_{ijk} siis ja ainult siis, kui punktid X_{ijk} ja Y_{ijk} paiknevad sellest tasandist erineval pool, s.t. kehtivad võrratused $i+j+k<\frac{9}{2}$ ja $i+j+k+3>\frac{9}{2}$. Esimene võrratus ei ole täidetud, kui indeksite i, j, k väärtused on $(2,2,2)$, $(1,2,2)$, $(2,1,2)$ või $(2,2,1)$, teine võrratus aga juhtudel $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$. Niisiis ei lõika vaadeldav tasand 8 ühikkuupi ja lõikab seega $27-8=19$ ühikkuupi.

5. *Fibonacci jada* $\{f_n\}$ defineeritakse tingimustega $f_1=f_2=1$ ja võrdusega $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ iga positiivse täisarvu n korral. Tõesta, et Fibonacci jada 1005. liige jagub arvuga 10 , ent ei jagu arvuga 100 .

Lahendus: a) Kirjutades välja Fibonacci jada esimesed liikmed:

$$1,\,1,\,2,\,3,\,5,\,8,\,13,\,21,\,34,\,55,\,\ldots$$

näeme, et selle jada iga kolmas liige on paarisarv ja iga viies liige jagub arvuga 5 — tõestame need väited. Fibonacci jada definitsioonist saame

$$f_{n+3}=f_{n+1}+f_{n+2}=f_{n+1}+(f_n+f_{n+1})=f_n+2f_{n+1}\ ,$$

s.t. jada liikmed f_n ja f_{n+3} on ühe ja sama paarsusega. Et $f_3=2$, siis olemegi tõestanud, et kõik jada liikmed kujul f_{3k} on paarisarvud.

Samuti leiame

$$f_{n+5}=f_{n+3}+f_{n+4}=2f_{n+3}+f_{n+2}=(2f_n+4f_{n+1})+(f_n+f_{n+1})=3f_n+5f_{n+1}\ ,$$

s.t. kui jada liige f_n jagub arvuga 5 , siis ka liige f_{n+5} jagub arvuga 5 . Et $f_5=5$, siis kõik jada liikmed kujul f_{5k} jaguvad arvuga 5 ning kõik liikmed kujul f_{15k} jaguvad arvuga $2\cdot5=10$. Et $1005=67\cdot15$, siis on ülesande esimene väide sellega tõestatud.

b) Näitame nüüd, et Fibonacci jada liige f_{1005} ei jagu arvuga 4 (ega järelikult ka arvuga 100). Selleks paneme tähele, et

$$\begin{aligned} f_{n+6} &= f_{n+4}+f_{n+5}=(f_{n+2}+f_{n+3})+f_{n+5}= \\ &= (f_n+f_{n+1})+(f_n+2f_{n+1})+(3f_n+5f_{n+1})=5f_n+8f_{n+1}\ , \end{aligned}$$

s.t. jada liige f_{n+6} jagub arvuga 4 siis ja ainult siis, kui liige f_n jagub arvuga 4 . Et $1005=6\cdot167+3$ ja $f_3=2$ ei jagu arvuga 4 , siis ka f_{1005} ei jagu arvuga 4 .

6. Leia kõik reaalarvuliste kordajatega polünoomid $p(x)$, mis rahuldavad iga reaalarvu x korral tingimust $x\cdot p(x)\cdot p(1-x)+x^3+100\geqslant 0$.

Vastus: $p(x)=x+b$, kus $-5\leqslant b\leqslant 4$, ning $p(x)=-x+b$, kus $-4\leqslant b\leqslant 5$.

Lahendus: Veendume kõigepealt, et $p(x)$ võib olla ainult esimese astme polünoom, s.t. $p(x)=ax+b$. Tõepoolest, olgu $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, kus $a_n\neq0$. Kui $n=0$, saame $x\cdot p(x)\cdot p(1-x)+x^3+100=x^3+a_0^2x+100$, see avaldis aga omandab ilmselt ka negatiivseid väärtusi. Kui $n>1$, siis on $x\cdot p(x)\cdot p(1-x)+x^3+100=a_n^2(-1)^nx^{2n+1}+\ldots$ paaritu astmega polünoom ning omandab seetõttu nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Lõpuks paneme tähele, et $p(x)\equiv0$ korral saame $x\cdot p(x)\cdot p(1-x)+x^3+100=x^3+100$, mis samuti omandab mõlema märgiga väärtusi.

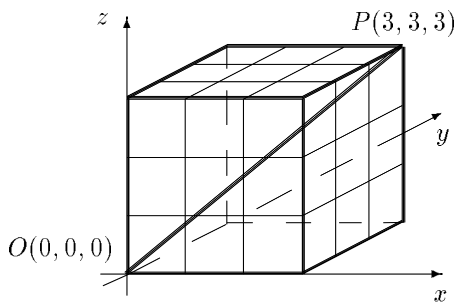
Olgu nüüd $p(x) = ax + b$, siis

$$x \cdot p(x) \cdot p(1-x) + x^3 + 100 = x \cdot (ax+b) \cdot (a+b-ax) + x^3 + 100 =$$
$$= (1-a^2)x^3 + a^2x^2 + (b^2+ab)x + 100 .$$

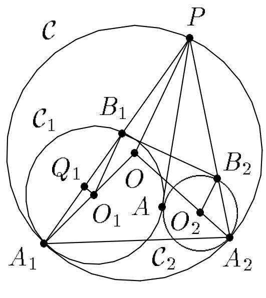
See polünoom omandab ainult mittenegatiivseid väärtusi siis ja ainult siis, kui $1 - a^2 = 0$ ja $(b^2+ab)^2 - 400a^2 \leqslant 0$, s.t. $|a| = 1$ ja $|b^2+ab| \leqslant 20$. Niisiis saame kaks võimalust:

a) $a = 1$ ja $|b^2+b| \leqslant 20$, kust $-5 \leqslant b \leqslant 4$;

b) $a = -1$ ja $|b^2-b| \leqslant 20$, kust $-4 \leqslant b \leqslant 5$.



Joonis 3



Joonis 4

7. Ringjooned $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ puutuvad teineteist väliselt punktis A ning puutuvad kolmandat ringjoont $\mathcal{C}$ seestpoolt vastavalt punktides A_1 ja A_2 . Olgu P ringjoontele $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ punktis A tõmmatud ühise puutuja üks lõikepunkt ringjoonega $\mathcal{C}$ ning olgu B_1 sirge PA_1 teine lõikepunkt ringjoonega $\mathcal{C}_1$ ja B_2 sirge PA_2 teine lõikepunkt ringjoonega $\mathcal{C}_2$. Tõesta, et sirge B_1B_2 on ringjoonte $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ ühine puutuja.

Lahendus: Olgu ringjoonte $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ keskpunktid vastavalt O , O_1 ja O_2 (vt. joonist 4). Piisab tõestada, et $\angle B_2B_1O_1 = \angle B_1B_2O_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Selleks paneme tähele, et vastavalt teoreemile lõikajast ja puutujast kehtivad võrdused $|PB_1| \cdot |PA_1| = |PA|^2 = |PB_2| \cdot |PA_2|$, mistõttu $\dfrac{|PB_1|}{|PB_2|} = \dfrac{|PA_2|}{|PA_1|}$ ning kolmnurgad PB_1B_2 ja PA_2A_1 on sarnased. Seega $\angle PB_1B_2 = \angle PA_1A_2 = \dfrac{1}{2}\angle POA_1$. Teisalt kehtib kolmnurkade $A_1O_1B_1$ ja A_1OP sarnasuse tõttu võrdus $\angle B_1O_1A_1 = \angle POA_1$, s.t. $\angle PB_1B_2 = \dfrac{1}{2}\angle B_1OA_1 = \angle B_1O_1Q_1$, kus Q_1 on punkti O_1 ristprojektsioon sirgele A_1B_1 . Niisiis $\angle PB_1B_2 + \angle O_1B_1Q_1 = \angle B_1O_1Q_1 + \angle O_1B_1Q_1 = \dfrac{\pi}{2}$ ja $\angle B_2B_1O_1 = \pi - (\angle PB_1B_2 + \angle O_1B_1Q_1) = \dfrac{\pi}{2}$. Analoogiliselt saame tõestada ka võrduse $\angle B_1B_2O_2 = \dfrac{\pi}{2}$.