

Kodused ülesanded statsionaarsele rühmale

Tähtaeg: 20. märts

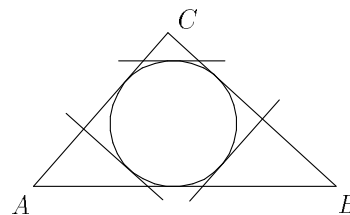
Need ülesanded pärinevad 1994. ja 1996. aasta "Balti Tee" võistlustele pakutute hulgast — mõnegi neist jättis žürii kõrvale kui liiga lihtsa...

1. Lõpmatul malelaual paiknevad 7991 malaratsut. Tõesta, et nende hulgast on võimalik valida 1997 sellist, millest ükski pole teise tule all.
2. Kolmnurga külgede pikkused a , b ja c rahuldavad tingimust $a^{1997} + b^{1997} = c^{1997}$. Tõesta, et see kolmnurk on teravnurkne.
3. Kas leidub kumer hulktahukas, mille:
 - a) tippude ja servade arvud on mõlemad algarvud;
 - b) tippude ja tahkude arvud on mõlemad algarvud;
 - c) servade ja tahkude arvud on mõlemad algarvud;
 - d) tippude, servade ja tahkude arvud on kõik algarvud?
4. Leia võrrandi $8x(x+1)(2x+1) = y(y+1)(2y+1+3 \cdot (-1)^y)$ kõik täisarvulised lahendid.
5. Funktsioon f on määratud kõikide positiivsete täisarvude hulgal järgmiste võrdustega:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(2) &= f(3) = 2, \\ f(4) &= f(5) = f(6) = 3, \\ f(7) &= f(8) = f(9) = f(10) = 4, \\ &\dots \end{aligned}$$

Esita see funktsioon kujul $y = f(x)$, kus võrduse paremal pool olev avaldis võib lisaks liitmisele, lahutamisele, korrutamisele ja jagamisele sisaldada veel ainult astendamist ja täisosa võtmist.

6. Kolmnurga ABC siseringjoonele tõmmatakse puutujad, mis on paralleelsed selle kolmnurga külgedega ega lange nendega kokku (vt. joonist). Olgu tippude A, B, C juurde moodustuvate väikeste kolmnurkade siseringjoonte raadiused vastavalt r_A , r_B ja r_C ning kolmnurga ABC siseringjoone raadius r . Tõesta, et kehtib võrdus $r = r_A + r_B + r_C$.



7. Kuidas konstrueerida sirkli ja joonlaua abil kolmnurk MNK , mis on sarnane etteantud kolmnurgaga ABC , s.t. $\frac{|AB|}{|MN|} = \frac{|BC|}{|NK|} = \frac{|CA|}{|KM|}$, ning mille tipud M , N ja K asuvad vastavalt etteantud paralleelsetel sirgetel m , n ja k ?
8. Olgu p algarv, a ja n positiivsed täisarvud ning $2^p + 3^p = a^n$. Tõesta, et $n = 1$.
9. Tõesta, et mistahes kumerat hulknurka pindalaga 3 cm^2 , millel leidub sümmeetriakeskpunkt, saab tervenisti katta 2 cm laiuse lõpmata pika ribaga.
10. Leia kõik niisugused positiivsete täisarvude paarid (p, q) , mille korral $p \geq q$ ja kehtib võrdus $\frac{p!}{q!(p-q)!} = q^p$.