Kodused ülesanded statsionaarsele rühmale

Ülesanded ja lahendused

1. Lõpmatul malelaual paiknevad 7991 maleratsut. Tõesta, et nende hulgast on võimalik valida 1997 sellist, millest ükski pole teise tule all.

   Lahendus: Et $7991 > 2 \cdot 1996$, siis leiduvad 1997 niisugust maleratsut, mis paiknevad üht ja sama värvi ruutudel ega saa seetõttu olla üksteise tule all.

2. Kolmnurga külgede pikkused a, b ja c rahuldavad tingimust $a^{1997} + b^{1997} = c^{1997}$. Tõesta, et see kolmnurk on teravnurkne.

   Lahendus: Ülesande tingimusest saame $a < c$ ja $b < c$, seega ka $a^{1995} < c^{1995}$ ja $b^{1995} < c^{1995}$ ning

   $$a^2 + b^2 = \frac{a^{1997}}{a^{1995}} + \frac{b^{1997}}{b^{1995}} > \frac{a^{1997} + b^{1997}}{c^{1995}} = c^2 .$$

   Olgu γ pikkusega c külje vastas asetsev kolmnurga nurk, siis koosinusteoreemist leiame $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > 0$, s.t. $\gamma < 90°$. Nurk γ on aga vaadeldavas kolmnurgas suurim, kuna ta asub selle pikima külje vastas.

3. Kas leidub kumer hulktahukas, mille:

   a) tippude ja servade arvud on mõlemad algarvud;

   b) tippude ja tahkude arvud on mõlemad algarvud;

   c) servade ja tahkude arvud on mõlemad algarvud;

   d) tippude, servade ja tahkude arvud on kõik algarvud?

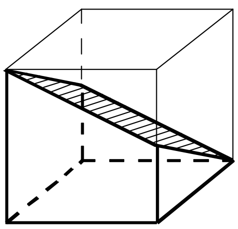
   Vastus: a), b), c) jah; d) ei.

   Lahendus: a) Lõigates kuupi tasandiga, mis läbib selle kaht vastastippu ja kahe teineteise vastas paikneva serva keskpunkte (joonis 1), saame kaks kongruentset hulktahukat, millel kummalgi on 7 tippu ja 11 serva.

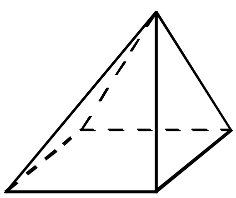
   b) Ruudukujulise põhjaga püramiidil (joonis 2) on 5 tippu ja 5 tahku.

   c) Lõigates kuubist ära kaks tetraeedrit nii, nagu näidatud joonisel 3, saame hulktahuka, millel on 11 serva ja 7 tahku.

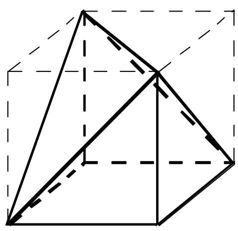
   d) Olgu kumeral hulktahukal p tippu, q serva ja r tahku, siis vastavalt Euleri valemile $p+r = q+2$, seega peab vähemalt üks arvudest p, q ja r olema paarisarv. Et seejuures ilmselt $p, q, r > 2$, siis ei saa need kõik olla algarvud.



Joonis 1



Joonis 2



Joonis 3

4. Leia võrrandi $8x(x+1)(2x+1) = y(y+1)(2y+1+3\cdot(-1)^y)$ kõik täisarvulised lahendid.

Vastus: $(0,-2)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$ ning $(n,2n)$ ja $(n,2n+1)$, kus n on mistahes täisarv.

Lahendus: Ülesandes antud võrdust teisendades saame paaris- või paarituarvulise y korral vastavalt $2x(2x+1)(2x+2) = y(y+1)(y+2)$ või $2x(2x+1)(2x+2) = (y-1)y(y+1)$. Saadud võrduse vasak pool on võrdne nulliga siis ja ainult siis, kui $x = 0$ või $x = -1$; neil juhtudel sobivad y väärtused -2, -1, 0 ja 1. Mistahes muude x väärtuste korral peab olema $y = 2x$ või $y = 2x + 1$, kuna nii võrduse vasakul kui ka paremal pool on siis kolme järjestikuse nullist erineva täisarvu korrutis.

5. Funktsioon f on määratud kõikide positiivsete täisarvude hulgal järgmiste võrdustega:

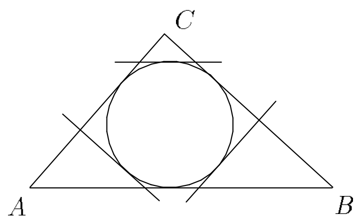
$$\begin{aligned} f(1) &= 1\,, \\ f(2) = f(3) &= 2\,, \\ f(4) = f(5) = f(6) &= 3\,, \\ f(7) = f(8) = f(9) = f(10) &= 4\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \end{aligned}$$

Esita see funktsioon kujul $y = f(x)$, kus võrduse paremal pool olev avaldis võib lisaks liitmisele, lahutamisele, korrutamisele ja jagamisele sisaldada veel ainult astendamist ja täisosa võtmist.

Vastus: Sobiv esitus on $f(n) = \left[(2n)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right]$.

Lahendus: Tabeli $m-1$ esimeses reas on kokku $1 + 2 + \ldots + (m-1) = \dfrac{m(m-1)}{2}$ funktsiooni f väärtust — seega võrdus $f(n) = m$ kehtib siis ja ainult siis, kui $\dfrac{m(m-1)}{2} + 1 \leqslant n \leqslant \dfrac{m(m+1)}{2}$. Kuna me vaatleme ainult positiivseid täisarvulisi n väärtusi, siis on see samaväärne võrratustega $\dfrac{m(m-1)}{2} + \dfrac{1}{8} < n < \dfrac{m(m+1)}{2} + \dfrac{1}{8}$, ehk $\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 < 2n < \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2$, ehk $m - \dfrac{1}{2} < \sqrt{2n} < m + \dfrac{1}{2}$. Siit leiame $f(n) = m = \left[(2n)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\right]$, kus $[x]$ tähistab arvu x täisosa.

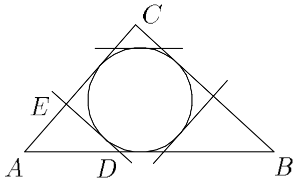
6. Kolmnurga ABC siseringjoonele tõmmatakse puutujad, mis on paralleelsed selle kolmnurga külgedega ega lange nendega kokku (vt. joonist 4). Olgu tippude A, B, C juurde moodustuvate väikeste kolmnurkade siseringjoonte raadiused vastavalt r_A, r_B ja r_C ning kolmnurga ABC siseringjoone raadius r. Tõesta, et kehtib võrdus $r = r_A + r_B + r_C$.



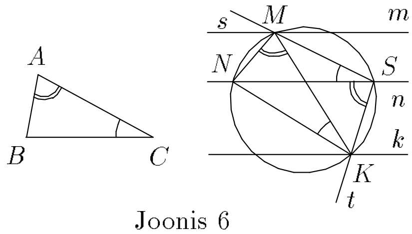
Joonis 4

Lahendus: Olgu $|BC| = a$, $|CA| = b$ ja $|AB| = c$ ning lõigaku kolmnurga ABC küljega BC paralleelne siseringjoone puutuja selle külgi AB ja AC vastavalt punktides D ja E (vt. joonist 5). Olgu h kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgus, siis kolmnurga ADE tipust A tõmmatud kõrgus on $h - 2r$. Arvutades kolmnurga ABC pindala kahel viisil, saame $\dfrac{ah}{2} = r\cdot\dfrac{a+b+c}{2}$, kust $\dfrac{r}{h} = \dfrac{a}{a+b+c}$. Kolmnurkade ABC

ja ADE sarnasusest saame $\dfrac{r_A}{r} = \dfrac{h-2r}{h} = 1 - 2\dfrac{r}{h} = 1 - \dfrac{2a}{a+b+c}$. Analoogiliselt leiame $\dfrac{r_B}{r} = 1 - \dfrac{2b}{a+b+c}$ ja $\dfrac{r_C}{r} = 1 - \dfrac{2c}{a+b+c}$, seega $\dfrac{r_A + r_B + r_C}{r} = 3 - 2 = 1$.



Joonis 5



Joonis 6

7. Kuidas konstrueerida sirkli ja joonlaua abil kolmnurk MNK , mis on sarnane etteantud kolmnurgaga ABC , s.t. $\dfrac{|AB|}{|MN|} = \dfrac{|BC|}{|NK|} = \dfrac{|CA|}{|KM|}$, ning mille tipud M , N ja K asuvad vastavalt etteantud paralleelsetel sirgetel m , n ja k ?

Lahendus: Paneme kõigepealt tähele, et sirkli ja joonlaua abil on võimalik teha järgmisi konstruktsioone (selgita, kuidas!):

a) kanda üle nurka, s.t. konstrueerida antud nurgaga võrdse nurga teine haar, kui selle tipp ja üks haar on antud;

b) konstrueerida ringjoon, mis läbib kolme antud punkti.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et sirge n on kolmest antud paralleelsest sirgest keskmine (vastasel korral muudame tähistusi). Olgu meil otsitav kolmnurk MNK leitud ja olgu S selle ümberringjoone teine lõikepunkt sirgega n (s.t. $S \neq N$). Siis $\angle NSK = \angle NMK = \angle A$ ja $\angle MSN = \angle MKN = \angle C$. (Miks?) Seega on nõutav konstruktsioon järgmine (vt. joonist 6):

1. Valime vabalt punkti S keskmisel sirgel n ;
2. Konstrueerime kiired s ja t , mis lähtuvad punktist S , moodustavad sirgega n vastavalt nurkadega $\angle C$ ja $\angle A$ võrdsed nurgad ning lõikavad vastavalt sirgeid m ja k ;
3. Olgu M kiire s lõikepunkt sirgega m ja K kiire t lõikepunkt sirgega k ;
4. Konstrueerime ringjoone, mis läbib punkte M , S ja K . (Miks need kolm punkti ei saa paikneda ühel sirgel?) Selle ringjoone teine lõikepunkt sirgega n on kolmnurga MNK kolmas tipp N .

8. Olgu p algarv, a ja n positiivsed täisarvud ning $2^p + 3^p = a^n$. Tõesta, et $n = 1$.

Lahendus: Positiivne täisarv k on võrdne mingi täisarvu a n. astmega parajasti siis, kui arvu k lahutuses erinevate algtegurite astmete korrutiseks iga algteguri astendaja jagub arvuga n .

Kui $p = 2$, $p = 3$ või $p = 5$, saame avaldise $2^p + 3^p$ väärtuseks vastavalt 13 , $35 = 5 \cdot 7$ ja $275 = 5^2 \cdot 11$. Olgu nüüd $p \geqslant 7$ — et p on paaritu arv, siis saame

$$2^p + 3^p = (2+3) \cdot (2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \ldots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1}) .$$

Et $3 \equiv -2 \pmod 5$, siis parempoolse sulgavaldise väärtus on kongruentne arvuga $p \cdot 2^{p-1}$ mooduli 5 järgi, s.t. ei jagu arvuga 5 . Seega sisaldab arv $2^p + 3^p$ algtegurit 5 esimeses astmes ega saa seetõttu olla võrdne mingi täisarvu n. astmega, kui $n > 1$.

9. Tõesta, et mistahes kumerat hulknurka pindalaga $3\,\mathrm{cm}^2$, millel leidub sümmeetriakeskpunkt, saab tervenisti katta 2 cm laiuse lõpmata pika ribaga.

Lahendus: Olgu O vaadeldava hulknurga sümmeetriakeskpunkt ning r suurima niisuguse ringjoone raadius, mille keskpunkt on punktis O ja mis sisaldub tervenisti vaadeldavas hulknurgas. See ringjoon puutub ilmselt hulknurga mingit kaht paralleelset külge, mille vahekaugus on seega $2r$. Kumeruse tõttu paikneb hulknurk tervenisti nende kahe küljega määratud sirgete vahelises lõpmatus ribas; jääb üle vaid tähele panna, et $\pi r^2 < 3\,\mathrm{cm}^2$ ning seega $r < 1\,\mathrm{cm}$.

10. Leia kõik niisugused positiivsete täisarvude paarid (p, q) , mille korral $p \geqslant q$ ja kehtib võrdus $\dfrac{p!}{q!(p-q)!} = q^p$.

Vastus: ainus selline paar on $(1, 1)$.

Lahendus: Ülesande tingimusest saame võrratuse

$$q^p = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-q+1)}{q!} \leqslant p^q .$$

Võttes selle võrratuse mõlemad pooled astmesse $\dfrac{1}{pq}$, saame $q^{\frac{1}{q}} \leqslant p^{\frac{1}{p}}$.

Näitame, et funktsioon $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ on rangelt kahanev, kui $x > e$. Tõepoolest, $\ln f(x) = \dfrac{1}{x} \ln x$ ning

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \ln x = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ning $f'(x) = (1 - \ln x) \cdot x^{\frac{1}{x} - 2} < 0$, kui $x > e$. Võrratustest $q \leqslant p$ ja $q^{\frac{1}{q}} \leqslant p^{\frac{1}{p}}$ saame nüüd $p = q$ või $q \leqslant e$, s.t. $q = 1$ või $q = 2$.

Juhul $q = 1$ leiame $1 = \dfrac{p!}{(p-1)!} = p$, juhul $q = 2$ saame aga võrduse $2^p = \dfrac{p!}{2(p-2)!} = \dfrac{p(p-1)}{2}$, mis ei kehti ühegi positiivse täisarvu p korral, kuna üks arvudest p ja $p-1$ on alati paaritu. Juht $p = q$ annab $q^p = 1$, kust ainsa võimalusena leiame $q = p = 1$.