Kodused ülesanded statsionaarsele rühmale

1. Leia funktsioon $f(x)$, mis on määratud ja pidev kõikide reaalarvuliste argumentide x korral ning mille graafik lõikab iga *mittevertikaalset* sirget lõpmata paljudes punktides. (Paneme tähele, et *mistahes* funktsiooni graafik lõikab iga *vertikaalset* sirget ülimalt ühes punktis.)

2. Kas kumer viisnurk, mille iga diagonaal on paralleelne mingi küljega, peab tingimata olema korrapärane?

3. Leia võrrandi $x^2 + 615 = 2^y$ kõik täisarvulised lahendid.

4. Leia niisuguste punktide lookus, mille kauguste summa antud kolmnurga külgedega määratud sirgetest on võimalikest vähim.

5. Ringi sisepiirkonnas on antud selle keskpunktist O erinev punkt Q. Ringjoonel võetakse punkt P nii, et nurk $\angle OPQ$ oleks võimalikest suurim. Kirjelda punkti P kõik võimalikud asukohad.

6. Ringi sisepiirkonnas on antud selle keskpunktist O erinev punkt Q. Olgu P vabalt võetud punkt ringjoonel. Leia nende punktide lookus, mis võivad olla kolmnurga OPQ mediaanide lõikepunktiks (fikseeritud punkti Q korral).

7. Kaks kalameest püüavad ringikujulisel järvel jää alt kala, kusjuures nende jääaugud paiknevad sümmeetriliselt järve keskpunkti suhtes ühe kolmandiku järve raadiuse kaugusel kaldast (kalameeste arvates on neil nõnda kala näkkamise tõenäosus võrdne). Kas kolmas kalamees saab teha oma jääaugu nii, et kõigi kolme kalamehe jaoks selline järveosa, mille igale punktile lähim jääauk on selle kalamehe oma, oleks sama pindalaga?

8. Kas tasandi mistahes punktist saab alati tõmmata puutuja funktsiooni $y = P(x)$ graafikule, kui $P(x)$ on:
   a) paarisastmega $n \geqslant 2$ polünoom;
   b) paaritu astmega $n \geqslant 3$ polünoom?

9. Kas on võimalik, et mingi sirge puutub funktsiooni $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (kus $a \neq 0$) graafikut rohkem kui ühes punktis?

10. Olgu $S = \{1, 1997, 1997^2, 1997^3, \ldots\}$. Leia vähim arv n, mille korral leidub niisugune arv N, mis esitub kahel erineval viisil n hulga S elemendi (mitte tingimata erinevate) summana. (Kaht esitust loeme erinevateks, kui nad ei ole teineteisest saadavad liidetavate ümberjärjestamise teel.)

11. Kas leidub positiivne täisarv, mille algteguriteks on ainult arvud $2, 3, 5$ ja 7 (mitte tingimata kõik) ja mis lõpeb numbritega 11 ?

12. Olgu hulknurk P mingi kumera n-nurga ja kumera m-nurga ühisosa.
    a) Tõesta, et hulknurga P külgede arv ei ületa $m+n$.
    b) Näita, et mistahes täisarvude $m, n \geqslant 3$ korral saab tasandil leida sellise kumera n-nurga ja kumera m-nurga, mille ühisosa on $(m+n)$-nurk.
    c) Kas punktis a) esitatud väide jääb kehtima, kui hulknurk P on mingi kumera n-nurga ja *mistahes* m-nurga ühisosa?

13. Kas tasandil leidub niisugune punkt P , mille kaugus mistahes ratsionaalarvuliste koordinaatidega punktist sirgel $y = 13x$ on ratsionaalarv?

14. Tasandil on antud 64 punkti. Tõmmates kõikvõimalikud sirged, mis läbivad mingit kaht antud punkti, saame täpselt 1997 erinevat sirget. Tõesta, et mingid neli antud punkti paiknevad ühel sirgel.

15. On antud kümme täisarvu (mis ei tarvitse olla kõik erinevad). Leides kõik summad üheksast antud arvust, saame tulemusteks arvud $82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91, 92$. (Siin *ei ole* trükiviga!) Leia need kümme arvu.

16. Olgu $a < 1997$ ja b positiivsed täisarvud. Tõesta, et jada

    $$a,\ a+1997,\ a+2^2\cdot 1997,\ a+3^2\cdot 1997,\ \ldots$$

    mingi liige on ühistegurita arvuga b .

17. Juku asub konstrueerima täisarve, alustades arvust 0 ja liites k-ndal sammul $(k = 1, 2, \ldots)$ eelmisena saadud arvule k või $-k$.
    a) Tõesta, et Juku saab nii konstrueerida kõik täisarvud.
    b) Olgu $m(n)$ vähim sammude arv, mille abil on Jukul võimalik konstrueerida arv n . Tõesta, et eksisteerib lõplik piirväärtus

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{\sqrt{n}}$$

    ja leia see piirväärtus.