

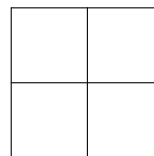
Kodused ülesanded statsionaarsele rühmale

Tähtaeg: 12. jaanuar 1997

1. Leia arv a , mis rahuldab tingimust

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}).$$

2. Mitu sekundit võtab aega kõrvaloleva joonise joonestamine järgmiste omadustega plotteril? Plotteri sulel on kaks võimalikku asendit: “all” (sule liikudes jääb paberile jälg) ja “ülal” (sule liikudes paberile jälge ei jää). Kummaski asendis võib sulg liikuda mööda paberit mistahes suunas kiirusega 1 cm sekundis; sule asendi muutmine toimub hetkeliselt. Väikesed ruudud on küljepikkusega 1 cm.



3. Olgu O teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ning M ja N vastavalt lõikude OA ja BC keskpunktid. Leia nurk $\angle OMN$, kui kehtivad võrdused $\angle ABC = 4\angle OMN$ ja $\angle ACB = 6\angle OMN$.

4. Olgu α üks ruutvõrrandi $x^2 - 3x + 3 = 0$ lahenditest. Leia niisugune positiivne täisarv n ja reaalarv k , et kehtib võrdus $\alpha^{1997} = k\alpha^n$ ning arv n on võimalikest vähim.

5. Osake x asub igal ajahetkel ühes punktides P ja Q . On teada, et:

- (1) kui mingil ajahetkel on osake x punktis P , siis ühe sekundi pärast on ta punktis Q ;
- (2) kui mingil ajahetkel on osake x punktis Q , siis ühe sekundi pärast võib ta võrdse tõenäosusega $\frac{1}{2}$ olla punktis P või punktis Q .

Kui osake x on praegusel hetkel punktis P , siis millise tõenäosusega on ta punktis P 10 sekundi pärast?

6. Kinos on reas 8 istekohta. Mitmel erineval viisil saavad neli abielupaari istuda neile kohtadele, kui iga naise kõrval tohib istuda ainult tema mees või mõni teine naine?
7. Ringjoonel on antud viis punkti A, B, C, D ja E . Mitmel erineval viisil on võimalik ühendada need punktid nelja sirglõiguga, nii et iga antud punkt oleks vähemalt ühe lõigu otspunktiks?
8. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (x, y) , mis rahuldavad tingimust $2x^2y^2 + y^2 = 26x^2 + 1201$.

9. Täisarvud a_1, a_2, \dots, a_m rahuldavad järgmisi tingimusi:

- (1) $1 \leq a_i \leq 4$ iga $i = 1, 2, \dots, m$ korral;
- (2) kui $a_i = a_j$ ja $a_{i+1} = a_{j+1}$, siis $i = j$.

Millise suurima täisarvu m korral on see võimalik?

10. Pind S on ristkoordinaatide süsteemis antud võrrandiga

$$x^2 - 4y^2 + z^2 - 12xy = 20.$$

Leia tasandil $2x + 3y + z = 3$ sellise kujundi pindala, mille piirjooneks on selle tasandi lõikejoon pinnaga S .

11. Korrapärase dodekaeedri (kaksteisttahuka, mille iga tahk on korrapärane viisnurk) tahud värvitakse nelja värviga nii, et mistahes kaks ühise servaga tahku on erinevat värvi. Mitmel erineval viisil on seda võimalik teha? (Kaht värvimist loeme erinevateks ainult siis, kui neid ei saa teineteiseks viia dodekaeedri pööramise abil.)
12. Leia kolme muutuja polünoom $f(x, y, z)$, mille aste muutuja x suhtes on 4 ja mis rahuldab mistahes a, b, c väärtuste korral järgmisi tingimusi:

$$\begin{cases} f(a, c^2, b) + f(a, b^2, c) = 0, \\ f(c^3, b, a) + f(a^3, b, c) = 0. \end{cases}$$