Kodused ülesanded statsionaarsele rühmale, 5. komplekt

Ülesanded ja lahendused

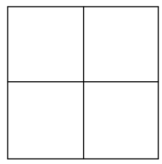
1. Leia arv a , mis rahuldab tingimust

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) \ .$$

Vastus: 9 .

Lahendus: Võttes ülesandes antud võrduse mõlemad pooled kuupi ning kasutades samasust $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc$, saame $\sqrt[3]{2}-1 = \frac{1}{a}(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3 = \frac{1}{a}(9\sqrt[3]{2}-9)$, kust $a = \frac{9\sqrt[3]{2}-9}{\sqrt[3]{2}-1} = 9$.

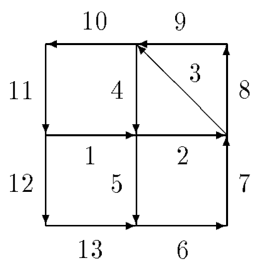
2. Mitu sekundit võtab aega kõrvaloleva joonise joonestamine järgmiste omadustega plotteril? Plotteri sulel on kaks võimalikku asendit: “all” (sule liikudes jääb paberile jälg) ja “ülal” (sule liikudes paberile jälge ei jää). Kummaski asendis võib sulg liikuda mööda paberit mistahes suunas kiirusega 1 cm sekundis; sule asendi muutmine toimub hetkeliselt. Väikesed ruudud on küljepikkusega 1 cm.



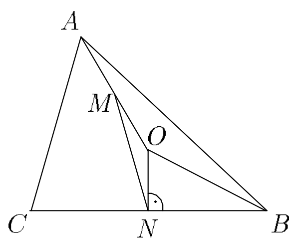
Vastus: $12+\sqrt{2}$ sekundit.

Lahendus: Uurime, milline on lühim võimalik vahemaa, mille plotteri sulg antud joonist joonestades võib läbida asendis “ülal”. Et joonisel on neli punkti, millest lähtub paaritu arv jooni, siis vähemalt kahe niisuguse punkti vahelise lõigu peab plotteri sulg kindlasti läbima asendis “ülal” (ülejäänud kaks peavad sel juhul olema vastavalt joonestamise alg- ja lõpp-punktiks). Et niisuguse lõigu vähim võimalik pikkus on $\sqrt{2}$ cm ning joonisel olevate lõikude kogupikkus on 12 cm, siis peab plotteri sulg kokku läbima vähemalt $12+\sqrt{2}$ cm.

Joonisel 1 on näidatud, kuidas joonestada antud kujund nii, et plotteri sulg läbiks asendis “ülal” ainult ühe lõigu pikkusega $\sqrt{2}$ cm (nooled näitavad sule liikumise suunda ja numbrid lõikude läbimise järjekorda).



Joonis 1



Joonis 2

3. Olgu O teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ning M ja N vastavalt lõikude OA ja BC keskpunktid. Leia nurk $\angle OMN$, kui kehtivad võrdused $\angle ABC = 4\angle OMN$ ja $\angle ACB = 6\angle OMN$.

   Vastus: $12°$.

   Lahendus: Tähistame $\angle OMN = \alpha$, siis ülesande tingimuste kohaselt $\angle ABC = 4\alpha$ ja $\angle ACB = 6\alpha$. Seega $\angle AOB = 12\alpha$ ning $\angle OAB = \angle OBA = 90° - 6\alpha$ ja $\angle OBN = 4\alpha - (90° - 6\alpha) = 10\alpha - 90°$ (vt. joonist 2). Edasi leiame $\angle BON = 180° - 10\alpha$ ja $\angle MON = 360° - 12\alpha - (180° - 10\alpha) = 180° - 2\alpha$. Seega $\angle ONM = \alpha = \angle OMN$, s.t. kolmnurk OMN on võrdhaarne ning $|ON| = |OM| = \frac{1}{2}|OA| = \frac{1}{2}|OB|$. Niisiis $\angle BON = 180° - 10\alpha = 60°$, kust $\alpha = 12°$.

4. Olgu α üks ruutvõrrandi $x^2 - 3x + 3 = 0$ lahenditest. Leia niisugune positiivne täisarv n ja reaalarv k , et kehtib võrdus $\alpha^{1997} = k\alpha^n$ ning arv n on võimalikest vähim.

   Vastus: $n = 5$, $k = 3^{996}$.

   Lahendus 1: Et antud ruutvõrrandi lahend α ei ole reaalarv, siis tuleb uurida, milliste positiivsete täisarvude n korral $k = \alpha^{1997-n}$ on reaalarv. Kasutades korduvalt võrdust $\alpha^2 = 3\alpha - 3$, leiame

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= 3\alpha^2 - 3\alpha = 6\alpha - 9 ; \\ \alpha^4 &= 6\alpha^2 - 9\alpha = 9\alpha - 18 ; \\ \alpha^5 &= 9\alpha^2 - 18\alpha = 9\alpha - 27 ; \\ \alpha^6 &= 9\alpha^2 - 27\alpha = -27 . \end{aligned}$$

   Näeme, et α^s on reaalarv parajasti siis, kui $s = 6t$ mingi täisarvu t korral. Niisiis on otsitavad n ja k väärtused $n = 1997 - 1992 = 5$ ja $k = \alpha^{1992} = 3^{996}$.

   Lahendus 2: Leiame ruutvõrrandi $x^2 - 3x + 3 = 0$ kompleksarvulised lahendid:

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} \pm i\sin\frac{\pi}{6}\right) .$$

   Kasutades Moivre'i valemit

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^s = r^s(\cos s\varphi + \sin s\varphi)$$

   näeme, et α^s on reaalarv (s.t. $s \cdot \frac{\pi}{6} = m\pi$, kus m on täisarv) parajasti siis, kui $s = 6t$. Edasi leiame $n = 5$ ja $k = 3^{996}$ samuti nagu eelmises lahenduses.

5. Osake x asub igal ajahetkel ühes punktidest P ja Q . On teada, et:

   (1) kui mingil ajahetkel on osake x punktis P , siis ühe sekundi pärast on ta punktis Q ;

(2) kui mingil ajahetkel on osake x punktis Q, siis ühe sekundi pärast võib ta võrdse tõenäosusega $\frac{1}{2}$ olla punktis P või punktis Q.

Kui osake x on praegusel hetkel punktis P, siis millise tõenäosusega on ta punktis P 10 sekundi pärast?

Vastus: $\frac{171}{512}$.

Lahendus: Kui osake x on mingil ajahetkel tõenäosusega p punktis P ja tõenäosusega $q = 1 - p$ punktis Q, siis ühe sekundi pärast on ta tõenäosusega $p' = \frac{1}{2}q$ punktis P ja tõenäosusega $q' = 1 - p' = 1 - \frac{1}{2}q$ punktis Q. Arvestades seda ning tingimust, et alghetkel on osake x tõenäosusega 1 punktis P, saame koostada järgmise tõenäosuste tabeli:

ajahetk	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{43}{128}$	$\frac{85}{256}$	$\frac{171}{512}$
Q	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{43}{64}$	$\frac{85}{128}$	$\frac{171}{256}$	$\frac{341}{512}$

6. Kinos on reas 8 istekohta. Mitmel erineval viisil saavad neli abielupaari istuda neile kohtadele, kui iga naise kõrval tohib istuda ainult tema mees või mõni teine naine?

Vastus: 816.

Lahendus: Tähistame naised ja nende abikaasad vastavalt sümbolitega N_i ja M_i, kus $i = 1, 2, 3, 4$. Joonisel 3 on kujutatud naiste kõik niisugused paigutused, mille korral nad istuvad vasakult paremale indeksite kasvamise järjekorras ning on võimalik ka mehed paigutada istuma vastavalt ülesande tingimustele (selleks paneme tähele, et naine saab üksikult istuda ainult rea servas ning iga kahe mitte kõrvuti asuva naiste rühma vahel peab istuma vähemalt kaks meest). Igal skeemil on märgitud lisaks naistele ka kõikide nende meeste kohad, kelle paigutamiseks vastavalt ülesande tingimustele jääb üksainus võimalus. Ülejäänud mehed võime vabadele kohtadele paigutada mistahes viisil; nende paigutusviiside arv on näidatud vastava skeemi kõrval.

Kokku leidsime 34 niisugust paigutusviisi, kus naised istuvad vasakult paremale indeksite kasvamise järjekorras. Ilmselt on ka naiste mistahes muu järjestuse korral võimalikke paigutusi samapalju — seega saame kokku $34 \cdot 4! = 816$ võimalikku paigutust.

N_1	N_2	N_3	N_4	M_4	$*$	$*$	$*$	6
M_1	N_1	N_2	N_3	N_4	M_4	$*$	$*$	2
$*$	M_1	N_1	N_2	N_3	N_4	M_4	$*$	2
$*$	$*$	M_1	N_1	N_2	N_3	N_4	M_4	2
$*$	$*$	$*$	M_1	N_1	N_2	N_3	N_4	6
N_1	M_1	$*$	$*$	M_2	N_2	N_3	N_4	2
N_1	M_1	M_3	M_2	N_2	N_3	N_4	M_4	1
N_1	M_1	M_2	N_2	N_3	N_4	M_4	M_3	1
N_1	N_2	N_3	M_3	$*$	$*$	M_4	N_4	2

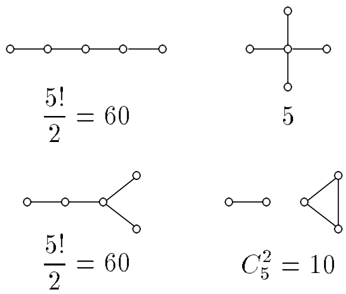
M_1	N_1	N_2	N_3	M_3	M_2	M_4	N_4	1
M_2	M_1	N_1	N_2	N_3	M_3	M_4	N_4	1
N_1	N_2	M_2	M_3	N_3	N_4	M_4	M_1	1
N_1	N_2	M_2	M_1	M_3	N_3	N_4	M_4	1
N_1	N_2	M_2	$*$	$*$	M_3	N_3	N_4	2
M_1	N_1	N_2	M_2	M_4	M_3	N_3	N_4	1
M_4	M_1	N_1	N_2	M_2	M_3	N_3	N_4	1
M_1	N_1	N_2	M_2	M_3	N_3	N_4	M_4	1
N_1	M_1	M_2	N_2	N_3	M_3	M_4	N_4	1

Joonis 3

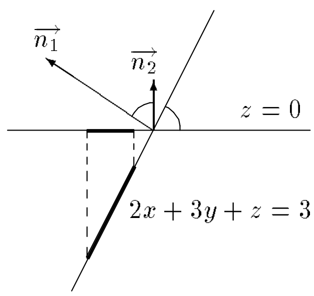
7. Ringjoonel on antud viis punkti A, B, C, D ja E. Mitmel erineval viisil on võimalik ühendada need punktid nelja sirglõiguga, nii et iga antud punkt oleks vähemalt ühe lõigu otspunktiks?

Vastus: 135.

Lahendus 1: Et punktide A, B, C, D, E vahele saab tõmmata kokku $C_5^2 = 10$ erinevat lõiku, siis on neli lõiku võimalik tõmmata $C_{10}^4 = 210$ erineval viisil. Kuna kolme punkti vahele saab tõmmata ainult 3 erinevat lõiku, siis võib niisuguseid punkte, mis ei ole ühegi tõmmatud lõigu otspunktiks, olla ülimalt üks. Selle punkti mistahes valiku korral (5 võimalikust) on ülejäänud nelja punkti vahele võimalik tõmmata kokku $C_4^2 = 6$ lõiku ning nelja lõigu tõmbamiseks on seega $C_6^4 = 15$ erinevat võimalust. Kokku on niisiis $5 \cdot 15 = 75$ võimalust tõmmata neli lõiku punktide A, B, C, D, E vahele nii, et leidub punkt, mis *ei ole* ühegi lõigu otspunktiks — ülesande tingimustele vastavaid võimalusi lõikude tõmbamiseks jääb seega $210 - 75 = 135$.



Joonis 4



Joonis 5

Lahendus 2: Vaatleme graafi, mille tipud vastavad punktidele A, B, C, D, E ja servad nende vahele tõmmatud lõikudele. Lõikude paigutus vastab ülesande tingimustele parajasti siis, kui saadud viie tipu ja nelja servaga graaf ei sisalda ühtegi *isoleeritud* tippu. Niisugused graafid on kujutatud joonisel 4, kusjuures arv iga graafi juures näitab, mitmel erineval viisil on selle tipud võimalik tähistada tähtedega A, B, C, D, E — ehk teisisõnu, mitmel erineval viisil lõike tõmmates me niisuguse graafi saame. Otsitav võimaluste koguarv on seega $60+60+5+10 = 135$.

8. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (x, y) , mis rahuldavad tingimust $2x^2y^2 + y^2 = 26x^2 + 1201$.

   Vastus: $x = 4,\ y = 7$; $x = 7,\ y = 5$.

   Lahendus: Kirjutame ülesandes antud võrduse kujul $2x^2(y^2-13)+y^2 = 1201$, ehk $(2x^2+1)(y^2-13) = 1188$. Et mistahes positiivse täisarvu x korral $2x^2+1 > 1$ ning $1188 = 11 \cdot 3^3 \cdot 2^2$, on paarituarvulise teguri $2x^2+1$ võimalikeks väärtusteks $3, 9, 11, 27, 33, 99$ ja 297 . Neist ainult $3 = 2\cdot1^2+1$, $9 = 2\cdot2^2+1$, $33 = 2\cdot4^2+1$ ja $99 = 2\cdot7^2+1$ annavad x väärtuseks täisarvu. Teise teguri y^2-13 väärtuseks saame vastavalt 396 , 132 , 36 ja 12 — neist ainult kaks viimast annavad ka täisarvulise y väärtuse.

9. Täisarvud $a_1, a_2, \ldots, a_m$ rahuldavad järgmisi tingimusi:

   (1) $1 \leqslant a_i \leqslant 4$ iga $i = 1, 2, \ldots, m$ korral;

   (2) kui $a_i = a_j$ ja $a_{i+1} = a_{j+1}$, siis $i = j$.

   Millise suurima täisarvu m korral on see võimalik?

   Vastus: 17 .

   Lahendus: Ülesande teine tingimus tähendab, et *järjestatud arvupaarid* (a_i, a_{i+1}) , kus $i = 1, 2, \ldots, m-1$, on kõik paarikaupa erinevad. Et arvudest $1, 2, 3$ ja 4 on võimalik moodustada $4^2 = 16$ erinevat järjestatud paari, siis $m \leqslant 17$. Teiselt poolt on lihtne kontrollida, et ülesande tingimusi rahuldab näiteks järgmine 17-elemendiline arvujada:

   $$1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 2, 2, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 1\ .$$

10. Pind S on ristkoordinaatide süsteemis antud võrrandiga

    $$x^2 - 4y^2 + z^2 - 12xy = 20\ .$$

    Leia tasandil $2x + 3y + z = 3$ sellise kujundi pindala, mille piirjooneks on selle tasandi lõikejoon pinnaga S .

    Vastus: $\dfrac{172\sqrt{14}}{25}\pi$.

    Lahendus: Pinna S ja tasandi $2x + 3y + z = 3$ lõikejoonele kuuluvate punktide koordinaadid (x, y, z) rahuldavad võrrandisüsteemi

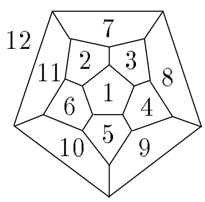
$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + z^2 - 12xy = 20 \\ z = 3 - 2x - 3y \, . \end{cases}$$

Asendades teisest võrrandist leitud z väärtuse esimesse võrrandisse, saame $5x^2 + 5y^2 - 12x - 18y = 11$, ehk $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{172}{25}$. Seega on otsitava kujundi *ristprojektsioon* xy-tasandile ring pindalaga $\frac{172}{25}\pi$ ning see kujund ise on ellips, mille pindala saame selle ristprojektsiooniks oleva ringi pindala jagamisel tasandi $2x + 3y + z = 3$ ja xy-tasandi vahelise nurga koosinusega (vt. joonist 5). See nurk on võrdne nende tasandite *normaalvektorite* $\overrightarrow{n_1} = (2, 3, 1)$ ja $\overrightarrow{n_2} = (0, 0, 1)$ vahelise nurgaga, mille koosinuse väärtuse leiame valemist $\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \dfrac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

11. Korrapärase dodekaeedri (kaksteisttahuka, mille iga tahk on korrapärane viisnurk) tahud värvitakse nelja värviga nii, et mistahes kaks ühise servaga tahku on erinevat värvi. Mitmel erineval viisil on seda võimalik teha? (Kaht värvimist loeme erinevateks ainult siis, kui neid ei saa teineteiseks viia dodekaeedri pööramise abil.)

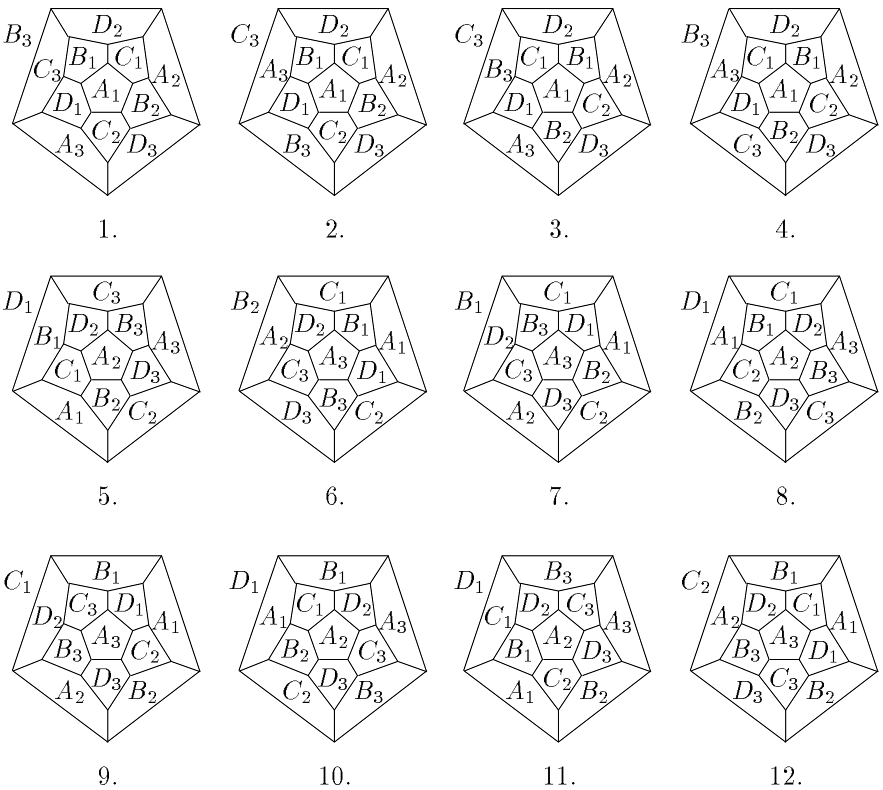
Vastus: 4 .

Lahendus: Vaatleme dodekaeedri asemel joonisel 6 kujutatud tasandilist kujundit (kus dodekaeedri kaheteistkümnendat tahku kujutab joonisest väljapoole jääv tasandi osa). Tähistagu A, B, C ja D tahkude värvimiseks kasutatavaid värve. Et dodekaeedri mistahes tahu ja selle naabertahkude nõutud viisil värvimiseks läheb vaja kõiki nelja värvi (miks?), võime üldisust kitsendamata eeldada, et tahk 1 on värvitud värviga A . Tahkude 2–6 värvimiseks on siis kuus erinevat viisi, mida ei ole võimalik üksteiseks viia joonise pööramisega ümber tahu 1 keskpunkti: $BCBCD$, $CBCBD$, $BDBDC$, $DBDBC$, $CDCDB$ ja $DCDCB$. On lihtne näha, et iga loetletud värvimisviisi korral tuleb tahkude 7–11 värvimisel kindlasti kasutada värvi A ja seda värvi, mis esineb tahkudel 2–6 ainult üks kord. Tahk 12 saab seega olla värvitud ainult ühega kahest ülejäänud värvist, kusjuures kummalgi juhul on ka tahkude 7–11 värvid sellega üheselt määratud. Kokku saame dodekaeedri tahkude nõutud viisil värvimiseks niisiis 12 võimalust, mis on kujutatud joonisel 7.



Joonis 6

Jääb üle tähele panna, et joonisel 7 ühes veerus kujutatud värvimised on üksteisest saadavad dodekaeedri pööramise teel (vastavad tahud on joonisel 7 tähistatud samade indeksitega), erinevates veergudes kujutatud värvimised aga mitte. Viimase väite tõestamiseks piisab näidata (miks?), et *esimeses reas* kujutatud värvimised ei ole üksteisest saadavad dodekaeedri pööramisel. Tõepoolest, värvimiste 1 ja 2 korral on tahk A_1 ainus, mille naabertahkude värvid päripäeva lugedes on $BCBCD$, ning seega peaks see tahk ja selle naabertahud jääma dodekaeedri pööramisel paigale — siis aga jääks dodekaeeder tervenisti paigale. Värvimiste 3 ja 4 korral ei ole niisugust tahku üldse ja seega ei ole neist dodekaeedri mistahes pööramisel võimalik saada värvimisi 1 või 2 . Värvimiste 3 ja 4 omavahelises erinevuses veendumiseks vaatleme tahku A_1 ja selle naabertahke nii nagu värvimiste 1 ja 2 korral.



Joonis 7

12. Leia kolme muutuja polünoom $f(x,y,z)$, mille aste muutuja x suhtes on 4 ja mis rahuldab mistahes a, b, c väärtuste korral järgmisi tingimusi:

$$\begin{cases} f(a,c^2,b)+f(a,b^2,c)=0\ , \\ f(c^3,b,a)+f(a^3,b,c)=0\ . \end{cases}$$

Vastus: nõutud omadustega polünoom on $A(x^2 - y^3)(y^3 - z^6)(x^2 - z^6)$, kus A on mistahes nullist erinev arv.

Lahendus: Vaatleme polünoome $g(z) = f(1, z, 1)$ ja $h(z) = f(1, 1, z)$. Vastavalt ülesande esimesele tingimusele kehtib mistahes c väärtuse korral võrdus $g(c^2) + h(c) = 0$, s.t. ühe muutuja polünoom $F(z) = g(z^2) + h(z)$ on samaselt võrdne nulliga. Seega saab muutuja z polünoomis $h(z) = f(1, 1, z)$ ning seega ka polünoomis $f(x, y, z)$ (miks?) sisalduda ainult paarisarvuliste astendajatega. Analoogiliselt saame teisest tingimusest, et muutuja z astendajad polünoomis f peavad jaguma kolmega — niisiis on polünoomi f iga üksliige kujul $C_{klm}x^k y^l z^{6m}$.

Paneme nüüd tähele, et polünoom $f(x, y, z) = (y^l - z^{2l})f_1(x, y, z)$ rahuldab esimest tingimust, kui $f_1(a, c^2, b) = f_1(a, b^2, c)$ mistahes a, b, c väärtuste korral. Samuti rahuldab polünoom $f(x, y, z) = (x^k - z^{3k})f_2(x, y, z)$ teist tingimust, kui $f_2(c^3, b, a) = f_2(a^3, b, c)$ mistahes a, b, c väärtuste korral. Seda ja esimeses lõigus saadud tulemust arvestades on loomulik otsida sobivat polünoomi kujul $f(x, y, z) = (y^3 - z^6)(x^2 - z^6)f_3(x, y, z)$. Et polünoomi $f(x, y, z)$ tegur $f_1(x, y, z) = (x^2 - z^6)f_3(x, y, z)$ rahuldaks seejuures eespool mainitud tingimust, peab $f_3(x, y, z)$ sisaldama tegurit $x^2 - y^3$. Nüüd jääb üle vaid tähele panna, et polünoom $f(x, y, z) = (x^2 - y^3)(y^3 - z^6)(x^2 - z^6)$ rahuldab kõiki ülesandes esitatud tingimusi.

Märkus: Toodud mõttekäik *ei tõesta*, et ülesande tingimusi rahuldav polünoom peab kindlasti olema niisuguse kujuga, vaid täidab üksnes suunavat rolli sellise polünoomi leidmisel. Kui Sul õnnestub tõestada, et leitud lahend on tõepoolest ainus (või vastupidi, leida mõni teine polünoom, mis sobib kõikide ülesande tingimustega), siis pane oma tõestus või näide korralikult kirja ja saada Täppisteaduste Kooli aadressil!