Kodused ülesanded statsionaarsele rühmale

1. Leia viga järgmises "tõestuses":

   VÄIDE: *Iga täisarvu* $n \geqslant 0$ *korral* $0 = 1 = \ldots = n$.

   TÕESTUS: Induktsioon n järgi.
   Baas: $n = 0$. Siis väide kehtib triviaalselt.
   Samm: Kehtigu väide mingi täisarvu $n \geqslant 0$ korral. Veendume, et siis kehtib väide ka $n+1$ korral. Et induktsiooni eeldusest saame $0 = 1 = \ldots = n$, siis $0 = 1 = 0 + 1 = n + 1$. Seega $0 = 1 = \ldots = n + 1$. Väide on tõestatud.

2. Tõesta, et mistahes positiivsete täisarvude m, n korral kehtib võrdus

   $$\mathrm{SÜT}(n,m) \cdot \mathrm{VÜK}(n,m) = nm\,,$$

   kus $\mathrm{SÜT}(m,n)$ ja $\mathrm{VÜK}(m,n)$ tähistavad vastavalt arvude m, n suurimat ühistegurit ja vähimat ühiskordset.

3. Olgu $\mathbb{Q}^+$ kõikide positiivsete ratsionaalarvude hulk. Tõesta, et leidub funktsioon $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, mis iga $x, y \in \mathbb{Q}^+$ korral rahuldab tingimust

   $$f\big(xf(y)\big) = \frac{f(x)}{y}\,.$$

4. Tõesta, et arvu $(1+\sqrt{2})^n$ saab esitada kujul $a+b\sqrt{2}$, kus a ja b on ühistegurita täisarvud.

5. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suvalised täisarvud. Tõesta, et korrutist

   $$(a_1^2+1) \cdot (a_2^2+1) \cdot \ldots \cdot (a_n^2+1)$$

   saab esitada kahe täisarvu ruutude summana.

6. Olgu antud seitse mittenegatiivset reaalarvu $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, kusjuures $a_1 = a_7 = 0$. Tõesta, et mingi indeksi $i \in \{2,3,4,5,6\}$ korral kehtib võrratus

   $$a_{i+1} + a_{i-1} \leq a_i\sqrt{3}\,.$$

7. Olgu $f(x) = \dfrac{x^2}{1+|x|}$, $g(x) = \sin\sqrt{x}$ ning $h(x) = 1 - f(x)$ iga $x \in [0,\infty)$ korral. Leia $(f \circ g \circ h)(x)$.

8. Leia funktsioonid f ja g , mis iga reaalarvu x korral rahuldavad võrrandisüsteemi

   $$\begin{cases} f(2x+1) + g(x-1) = x \\ f(2x+1) - 2g(x-1) = 2x^2\,. \end{cases}$$

9. Läbi kolmnurga ABC tipu A ja mediaani CD keskpunkti E joonestatakse sirge, mis lõikab kolmnurga külge BC punktis F . Millises suhtes jagab punkt F külje BC ?

10. Olgu P_1 kumer üheksatipuline hulktahukas tippudega A_1 , A_2 , ..., A_9 ning P_2 , P_3 , ..., P_9 hulktahukad, mis on saadud hulktahukast P_1 selliste paralleellüketega, mis viivad punkti A_1 vastavalt punktideks A_2 , A_3 , ..., A_9 . Tõesta, et vähemalt kahel hulktahukatest P_1 , P_2 , ..., P_9 leidub ühine sisepunkt.

11. Kolmnurga ABC külgedele AC ja BC konstrueeritakse ruudud ACA_1A_2 ja BCB_1B_2 . Tõesta, et kolmnurga ABC mediaan CM on risti lõiguga A_1B_1 ning $|CM| = \dfrac{1}{2}|A_1B_1|$.