Kodused ülesanded statsionaarsele rühmale, 4. komplekt

Ülesannete lahendused

1. Leia viga järgmises "tõestuses":

   VÄIDE: *Iga täisarvu* $n \geqslant 0$ *korral* $0 = 1 = \ldots = n$.

   TÕESTUS: Induktsioon n järgi.

   Baas: $n = 0$. Siis väide kehtib triviaalselt.

   Samm: Kehtigu väide mingi täisarvu $n \geqslant 0$ korral. Veendume, et siis kehtib väide ka $n+1$ korral. Et induktsiooni eeldusest saame $0 = 1 = \ldots = n$, siis $0 = 1 = 0 + 1 = n + 1$. Seega $0 = 1 = \ldots = n + 1$. Väide on tõestatud.

   Lahendus. Esitatud "tõestuses" toodud arutlus induktsiooni sammu kohta ei sobi $n = 0$ korral, kuna selles kasutatakse oluliselt võrdust $0 = 1$.

2. Tõesta, et mistahes positiivsete täisarvude m, n korral kehtib võrdus

   $$\mathrm{SÜT}(n, m) \cdot \mathrm{VÜK}(n, m) = nm\,,$$

   kus $\mathrm{SÜT}(m, n)$ ja $\mathrm{VÜK}(m, n)$ tähistavad vastavalt arvude m, n suurimat ühistegurit ja vähimat ühiskordset.

   Lahendus 1. Olgu $d = \mathrm{SÜT}(n, m)$ ning olgu $n' = \frac{n}{d}$ ja $m' = \frac{m}{d}$. Siis $\mathrm{SÜT}(n', m') = 1$ (kui arv $c > 1$ oleks arvude n' ja m' ühistegur, siis arv $cd > d$ oleks arvude n ja m ühistegur). Näitame, et $\mathrm{VÜK}(n, m) = n'm'd$. Et $n = n'd$ ja $m = m'd$, siis arv $n'm'd$ on arvude n ja m ühiskordne. Teiselt poolt veendume, et arvude n ja m suvaline ühiskordne c jagub arvuga $n'm'd$. Tõepoolest, kuna arv c jagub arvudega n ja m , siis leiduvad sellised täisarvud a ja b , et $c = na = mb$, seega $c = n'da = m'db$. Olgu $c' = \frac{c}{d}$, siis $c' = n'a = m'b$. Seega c' on täisarv, mis jagub arvudega n' ja m' . Kuna $\mathrm{SÜT}(n', m') = 1$, siis jagub arv c' ka korrutisega $n'm'$. Seega arv $c'd = c$ jagub arvuga $n'm'd$, mida oligi vaja tõestada. Ülesande lahenduse lõpetamiseks paneme nüüd tähele, et

   $$\mathrm{SÜT}(n, m) \cdot \mathrm{VÜK}(n, m) = d \cdot (n'm'd) = (n'd) \cdot (m'd) = nm\,.$$

   Lahendus 2. Esitame arvud n ja m algarvude astmete korrutisena — olgu

   $$n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i} \qquad \text{ja} \qquad m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{l_i}$$

   (siin $p_1, p_2, \ldots, p_s$ on kõik erinevad algarvud, mis esinevad arvu n *või* arvu m algtegurina ning $k_i, l_i \geqslant 0$ iga $i = 1, \ldots, s$ korral). Siis ilmselt

   $$\mathrm{SÜT}(n, m) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\min(k_i, l_i)} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{VÜK}(n, m) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\max(k_i, l_i)}\,.$$

   Kuna mistahes arvude x , y korral kehtib võrdus $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$, siis

   $$\mathrm{SÜT}(n, m) \cdot \mathrm{VÜK}(n, m) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\min(k_i, l_i) + \max(k_i, l_i)} = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i + l_i} = nm\,.$$

3. Olgu $\mathbb{Q}^+$ kõikide positiivsete ratsionaalarvude hulk. Tõesta, et leidub selline funktsioon $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, mis iga $x, y \in \mathbb{Q}^+$ korral rahuldab tingimust

   $$f\big(xf(y)\big) = \frac{f(x)}{y}\,.$$

   Lahendus. Paneme kõigepealt tähele, et ülesandes esitatud tingimuse täidetuseks on piisav, kui

   $$f(xy) = f(x)f(y) \tag{1}$$

ning

$$f(f(x))=\frac{1}{x} \qquad (2)$$

mistahes positiivsete ratsionaalarvude x ja y korral — tõepoolest, siis $f(xf(y)) = = f(x)f(f(y)) = f(x)\cdot\frac{1}{y} = \frac{f(x)}{y}$ iga $x,y\in\mathbb{Q}^+$ korral. Paneme ka tähele, et ülaltoodud tingimustest järeldub võrdus $f\Big(\frac{1}{x}\Big) = f\big(f(f(x))\big) = \frac{1}{f(x)}$ ning sellest $x=1$ korral omakorda võrdus $f(1)=1$.

Asume nüüd konstrueerima funktsiooni, mis rahuldaks mistahes positiivsete ratsionaalarvude x, y korral tingimusi (1) ja (2). Selleks järjestame kõigepealt kõik algarvud jadasse, s.t. nummerdame nad naturaalarvudega: p_1, p_2, ... (võime seda teha näiteks algarvude kasvamise järjekorras). Defineerime funktsiooni f kõigepealt kõigil algarvudel ja nende pöördarvudel: $f(p_i) = p_{i+1}$, kui i on paaritu arv, $f(p_i) = \frac{1}{p_{i-1}}$, kui i on paarisarv ning $f\Big(\frac{1}{p_i}\Big) = \frac{1}{f(p_i)}$ mistahes indeksi i korral. Kuna iga positiivne ratsionaalarv $x\neq 1$ on üheselt esitatav algarvude astmete korrutisena: $x = p_{i_1}^{k_1}p_{i_2}^{k_2}\dots p_{i_s}^{k_s}$, kus astendajad k_1, k_2, ..., k_s on positiivsed või negatiivsed täisarvud, siis arvestades tingimust (1) ning defineerides täiendavalt $f(1)=1$ saame funktsiooni f üheselt laiendada kogu hulgale Q^+: $f(p_{i_1}^{k_1}p_{i_2}^{k_2}\dots p_{i_s}^{k_s}) = f(p_{i_1})^{k_1}f(p_{i_2})^{k_2}\dots f(p_{i_s})^{k_s}$. Ilmselt on tingimus (1) seejuures täidetud suvaliste $x,y\in\mathbb{Q}^+$ korral. Tõestame nüüd, et niiviisi defineeritud funktsioon f rahuldab ka tingimust (2).

a) Näitame kõigepealt, et see tingimus on täidetud mistahes algarvulise argumendi p_i korral. Tõepoolest, kui i on paaritu arv, siis $f(f(p_i)) = f(p_{i+1}) = \frac{1}{p_i}$; paarisarvulise i korral $f(f(p_i)) = f\Big(\frac{1}{p_{i-1}}\Big) = \frac{1}{f(p_{i-1})} = \frac{1}{p_i}$.

b) Olgu nüüd $x = p_{i_1}^{k_1}p_{i_2}^{k_2}\dots p_{i_s}^{k_s}$ suvaline ühest erinev positiivne ratsionaalarv, siis

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(f(p_{i_1}^{k_1}p_{i_2}^{k_2}\dots p_{i_s}^{k_s})) = f\big(f(p_{i_1})^{k_1}f(p_{i_2})^{k_2}\dots f(p_{i_s})^{k_s}\big) = \\ &= f(f(p_{i_1}))^{k_1}f(f(p_{i_2}))^{k_2}\dots f(f(p_{i_s}))^{k_s} = p_{i_1}^{-k_1}p_{i_2}^{-k_2}\dots p_{i_s}^{-k_s} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

c) Tingimus (2) on täidetud ka $x=1$ korral: $f(f(1)) = f(1) = 1 = \frac{1}{1}$.

4. Tõesta, et arvu $(1+\sqrt{2})^n$ saab esitada kujul $a+b\sqrt{2}$, kus a ja b on ühistegurita täisarvud.

Lahendus. Rakendame induktsiooni n järgi.

Olgu $n=1$, siis $(1+\sqrt{2})^1 = 1+\sqrt{2})$, s.t. $a=b=1$ ning $\text{SÜT}(1,1)=1$.

Kehtigu nüüd mingi n väärtuse korral võrdus $(1+\sqrt{2})^n = a+b\sqrt{2}$, kus $\text{SÜT}(a,b)=1$. Siis $(1+\sqrt{2})^{n+1} = (a+b\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2}) = (a+2b)+(a+b)\sqrt{2}$. Olgu $\text{SÜT}(a+2b,a+b)=d$, siis arv $(a+2b)-(a+b)=b$ jagub arvuga d ning arv $(a+b)-b=a$ jagub arvuga d — seega $d=1$.

5. Olgu $a_1,a_2,\dots,a_n$ suvalised täisarvud. Tõesta, et korrutist

$$(a_1^2+1)\cdot(a_2^2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n^2+1)$$

saab esitada kahe täisarvu ruutude summana.

Lahendus. Rakendame induktsiooni n järgi.

Olgu $n=1$, siis arv a_1^2+1 esitub arvude a_1 ja 1 ruutude summana.

Kehtigu nüüd võrdus $(a_1^2+1)\cdot\ldots\cdot(a_{k-1}^2+1)=m^2+n^2$. Siis

$$\begin{aligned}(a_1^2+1)\cdot\ldots\cdot(a_{k-1}^2+1)\cdot(a_k^2+1) &= (m^2+n^2)\cdot(a_k^2+1)=\\ &= (ma_k+n)^2+(na_k-m)^2\ .\end{aligned}$$

6. Olgu antud seitse mittenegatiivset reaalarvu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 , kusjuures $a_1=a_7=0$. Tõesta, et mingi indeksi $i\in\{2,3,4,5,6\}$ korral kehtib võrratus

$$a_{i+1}+a_{i-1}\leqslant a_i\sqrt{3}\,.$$

Lahendus. Oletame vastuväiteliselt, et iga $i=2,3,4,5,6$ korral kehtib vastupidine võrratus $a_{i+1}+a_{i-1}>a_i\sqrt{3}$. Rakendades seda võrratust järgemööda $i=2,3,4,5$ korral, saame vastavalt $a_2<\dfrac{a_3}{\sqrt{3}}$, $a_3<\dfrac{a_4\sqrt{3}}{2}$, $a_4<\dfrac{2a_5}{\sqrt{3}}$ ja $a_5<a_6\sqrt{3}$. Teiselt poolt annab sama võrratus $i=6$ korral $a_5>a_6\sqrt{3}$ — vastuolu.

7. Olgu $f(x)=\dfrac{x^2}{1+|x|}$, $g(x)=\sin\sqrt{x}$ ning $h(x)=1-f(x)$ iga $x\in[0,\infty)$ korral. Leia $(f\circ g\circ h)(x)$.

Vastus: $(f\circ g\circ h)(x)=\dfrac{\sin^2\sqrt{\dfrac{1+x-x^2}{1+x}}}{1+\sin\sqrt{\dfrac{1+x-x^2}{1+x}}}$ on määratud, kui $x\in\left[0,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Lahendus. Et $(f\circ g\circ h)(x)=f\big(g(h(x))\big)$ ning funktsioonid f , g ja h on määratud ainult argumendi positiivsete väärtuste korral, siis leiame kõigepealt funktsiooni $h(x)$ kuju ja positiivsuspiirkonna: $h(x)=1-f(x)=\dfrac{1+x-x^2}{1+x}$ (kuna vaatleme ainult juhtu $x\geqslant 0$, võime siin absoluutväärtuse märgid ära jätta) ning $h(x)\geqslant 0$, kui $x\leqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Niisiis on funktsioon $(g\circ h)(x)=g(h(x))$ määratud ainult siis, kui $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ning sel juhul $(g\circ h)(x)=\sin\sqrt{\dfrac{1+x-x^2}{1+x}}$. Et vaadeldavate x väärtuste korral ilmselt $0\leqslant\dfrac{1+x-x^2}{1+x}\leqslant 1$, siis $(g\circ h)(x)\geqslant 0$ kõikide selliste x väärtuste korral. Niisiis on ka funktsioon $(f\circ g\circ h)(x)$ määratud iga $x\in\left[0,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ korral ja omab siis kuju

$$(f\circ g\circ h)(x)=\frac{\big((g\circ h)(x)\big)^2}{1+(g\circ h)(x)}=\frac{\sin^2\sqrt{\dfrac{1+x-x^2}{1+x}}}{1+\sin\sqrt{\dfrac{1+x-x^2}{1+x}}}\ .$$

8. Leia funktsioonid f ja g , mis iga reaalarvu x korral rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f(2x+1)+g(x-1)=x\\ f(2x+1)-2g(x-1)=2x^2\ .\end{cases}$$

Vastus: $f(x)=\dfrac{1}{6}(x^2-1)$, $g(x)=-\dfrac{1}{3}(2x^2+3x+1)$.

Lahendus. Liites teisele võrrandile kaks korda esimese võrrandi, saame võrduse $3f(2x+1)=$ $=2(x^2+x)$, millest $f(2x+1)=\dfrac{2}{3}(x^2+x)$. Teeme muutuja vahetuse $y=2x+1$, siis

$x = \frac{y-1}{2}$ ja $f(y) = \frac{1}{6}(y^2 - 1)$.

Lahutades nüüd esimesest võrrandist teise, saame $3g(x-1) = x - 2x^2$, millest leiame $g(x-1) = \frac{1}{3}(x - 2x^2)$. Tehes muutuja vahetuse $z = x - 1$, saame $x = z + 1$ ja $g(z) = -\frac{1}{3}(2z^2 + 3z + 1)$.

Märkus: Ülesannete 9–11 lahenduste uurimisel tee ise vajalikud joonised!

9. Läbi kolmnurga ABC tipu A ja mediaani CD keskpunkti E joonestatakse sirge, mis lõikab kolmnurga külge BC punktis F . Millises suhtes jagab punkt F külje BC ?

Vastus: $1:2$.

Lahendus. Teeme homoteetse teisenduse punkti A suhtes teguriga 2 . Olgu C' punkti C kujutis ja E' punkti E kujutis. Kolmnurk ACD teiseneb siis kolmnurgaks $AC'B$, kusjuures lõigud AE' ja BC on kolmnurga $AC'B$ mediaanid. Kuna mediaanide lõikepunkt jaotab kõik mediaanid suhtes $1:2$, siis

$$\frac{|CF|}{|FB|} = \frac{1}{2} .$$

10. Olgu P_1 kumer üheksatipuline hulktahukas tippudega A_1 , A_2 , ..., A_9 ning P_2 , P_3 , ..., P_9 hulktahukad, mis on saadud hulktahukast P_1 selliste paralleellüketega, mis viivad punkti A_1 vastavalt punktideks A_2 , A_3 , ..., A_9 . Tõesta, et vähemalt kahel hulktahukatest P_1 , P_2 , ..., P_9 leidub ühine sisepunkt.

Lahendus. Vaatleme hulktahukat P , mis on saadud hulktahukast P_1 homoteetsel teisendusel keskpunktiga A_1 ja teguriga 2 ning näitame, et see sisaldab kõiki hulktahukaid P_1 , P_2 , ..., P_9 .

Hulktahuka P_1 jaoks on see väide ilmne. Võtame nüüd suvalise punkti X hulktahukast P_i , kus $i \in \{2, 3, \ldots, 9\}$. Olgu Y hulktahuka P_1 punkt, mis teiseneb punktiks X , kui hulktahukas P_1 teisendada paralleellükkega hulktahukaks P_i . Et punktid A_i ja Y kuuluvad hulktahukasse P_1 , siis hulktahuka P_1 kumeruse tõttu kuulub sinna ka lõigu A_iY keskpunkt. See on aga rööpküliku A_1A_iXY diagonaaalide lõikepunkt ja teiseneb vaadeldava homoteetia tulemusel punktiks X . Seega hulktahuka P_i suvaline punkt X kuulub hulktahukasse P .

Kuna hulktahuka P ruumala $V(P) = 8V(P_1)$ ning ta sisaldab 9 hulktahukat P_1 , P_2 , ..., P_9 , millest igaühe ruumala on $V(P_i) = V(P_1)$, siis leidub kaks hulktahukat, mille ühisosa ruumala on positiivne. Nendel hulktahukatel ongi siis ühine sisepunkt.

11. Kolmnurga ABC külgedele AC ja BC konstrueeritakse ruudud ACA_1A_2 ja BCB_1B_2 . Tõesta, et kolmnurga ABC mediaan CM on risti lõiguga A_1B_1 ning $|CM| = \frac{1}{2}|A_1B_1|$.

Lahendus. Pöörame kolmnurka ABC $90°$ võrra ümber punkti C nii, et punkt A teiseneks punktiks A_1 . Olgu B' punkti B kujutis ja K punkti M kujutis. Paneme tähele, et punktid B' , C ja B asuvad ühel sirgel ning $|B'C| = |BC| = |CB_1|$. Et ka $|B'K| = |KA_1|$, siis CK on kolmnurga A_1B_1B' kesklõik, s.t. lõigud CK ja A_1B_1 on paralleelsed ning $|CK| = \frac{1}{2}|A_1B_1|$. Kuna lõigud CM ja CK on risti ja $|CM| = |CK|$, siis on mõlemad ülesandes esitatud väited tõestatud.