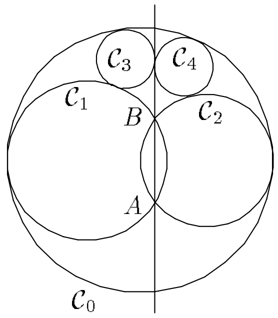
Kodused ülesanded Balti Tee võistkonnale.

1. Joonisel 1 kujutatud ringjoonte $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ keskpunktid on ühel sirgel ning ringjooned $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ lõikuvad punktides A ja B. Ringjooned $\mathcal{C}_3$ ja $\mathcal{C}_4$ puutuvad sirget AB, ringjoont $\mathcal{C}_0$ ning vastavalt ringjooni $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$. Tõesta, et ringjooned $\mathcal{C}_3$ ja $\mathcal{C}_4$ on võrdse raadiusega.

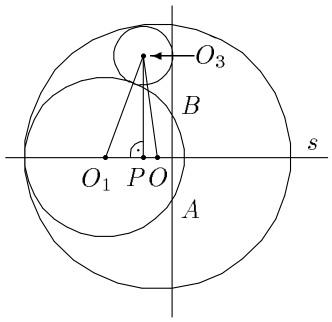


Joonis 1

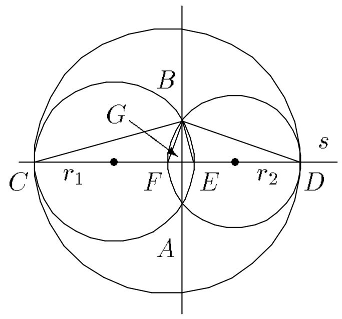
Lahendus: Olgu O, O_1 ja O_3 vastavalt ringjoonte $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_3$ keskpunktid ning P punkti O_3 ristprojektsioon sirgele s, millel asuvad ringjoonte $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ keskpunktid (vt. joonist 2). Olgu R, r_1 ja r_3 vastavalt ringjoonte $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_3$ raadiused ja x punkti O_1 kaugus sirgest AB. Täisnurksetest kolmnurkadest O_1O_3P ja OO_3P leiame

$$(r_1 + r_3)^2 - (x - r_3)^2 = |O_3P|^2 = (R - r_3)^2 - (R - r_1 - x + r_3)^2 ,$$

millest lihtsustades saame $r_3 = \dfrac{(r_1 + x)(R - r_1)}{2R}$. Analoogiliselt leiame $r_4 = \dfrac{(r_2 + y)(R - r_2)}{2R}$, kus y on ringjoone $\mathcal{C}_2$ keskpunkti kaugus sirgest AB.



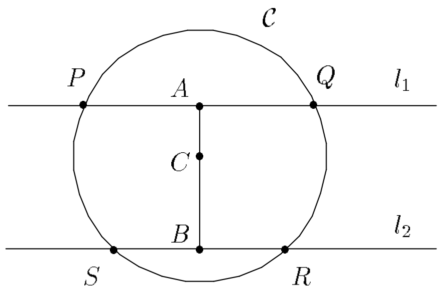
Joonis 2



Joonis 3

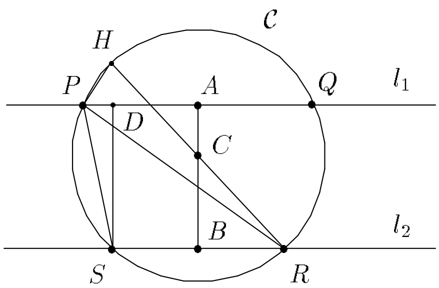
Olgu nüüd C ja D ringjoone $\mathcal{C}_0$ puutepunktid vastavalt ringjoontega $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ ning E , F ja G vastavalt ringjoonte $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ ja sirge AB lõikepunktid sirgega s (vt. joonist 3). Tähistame $a = |CG|$, $b = |DG|$, $c = |EG|$, $d = |FG|$ ja $z = |BG|$, siis saame tõestatava võrdusega $r_3 = r_4$ samaväärse võrduse $(r_1 + x)(R - r_1) = (r_2 + y)(R - r_2)$ kirjutada kujul $a \cdot \left(\frac{a+b}{2} - r_1\right) = b \cdot \left(\frac{a+b}{2} - r_2\right)$ ehk $a \cdot \frac{c}{2} = b \cdot \frac{d}{2}$. Viimase võrduse kehtivuses veendumiseks vaatleme täisnurkseid kolmnurki CBE ja DBF , millest saame vastavalt $a \cdot c = z^2$ ja $b \cdot d = z^2$.

2. Joonisel 4 on kujutatud paralleelsed sirged l_1 ja l_2 ja nendega risti olev lõik AB . Ringjoon $\mathcal{C}$, mille keskpunkt C asub lõigul AB ja raadius on suurem kui lõigu AB pikkus, lõikab sirgeid l_1 ja l_2 vastavalt punktides P , Q , R ja S . Tõesta, et avaldise $|PR| \cdot |PS|$ väärtus ringjoone $\mathcal{C}$ fikseeritud raadiuse korral ei sõltu punkti C valikust.



Joonis 4

Lahendus: Tõmbame ringjoonele $\mathcal{C}$ diameetri, mille üheks otspunktiks on punkt R — olgu H selle diameetri teine otspunkt. Tõmbame veel punktist S ristlõigu SD sirgele l_1 (vt. joonist 5).



Joonis 5

Kuna sirged l_1 ja l_2 on paralleelsed, on kaared PQR ja QPS võrdsed ning $\angle SPD = \angle PHR$. Seega on täisnurksed kolmnurgad HPR ja PDS sarnased ning $\frac{|PS|}{|RH|} = \frac{|SD|}{|PR|}$. Järelikult $|PR| \cdot |PS| = |RH| \cdot |SD|$, mis on ringjoone $\mathcal{C}$ diameetri ning sirgete l_1 ja l_2 vahelise kauguse korrutis ning ilmselt ei sõltu punkti C valikust.

3. Olgu antud ruudustik mõõtmetega $m \times n$, mille sõlmed on nummerdatud arvupaaridega (k,l), kus $0 \leqslant k \leqslant m$ ja $0 \leqslant l \leqslant n$. Lubatud käigud on sõlmest (k,l) sõlme $(k+1,l)$ ja sõlmest (k,l) sõlme $(k,l+1)$. Ruudustikust eemaldatakse sõlm koordinaatidega (i,j), mis ei ühti sõlmedega $(0,0)$ ega (m,n), nii et seda sõlme pole enam võimalik läbida. Kui mitmel erineval viisil on seejärel võimalik jõuda sõlmest $(0,0)$ sõlme (m,n)?

   Vastus: $C_{m+n}^{m} - C_{i+j}^{i} \cdot C_{m+n-i-j}^{m-i}$.

   Lahendus: Selleks, et jõuda sõlmest $(0,0)$ sõlme (m,n), on vaja teha kokku $m+n$ käiku. Iga sellist teed võime vaadelda kui $(m+n)$-elemendilist jada, mis koosneb m ühest ja n nullist (kus ühed vastavad liikumisele ühes sihis ja nullid liikumisele teises sihis). Selliseid jadasid on kokku C_{m+n}^{m}.

   Samal viisil veendume, et sõlmest $(0,0)$ leidub C_{i+j}^{i} erinevat teed sõlme (i,j) ning sõlmest (i,j) $C_{m+n-i-j}^{m-i}$ erinevat teed sõlme (m,n). Järelikult on kokku $C_{i+j}^{i} \cdot C_{m+n-i-j}^{m-i}$ niisugust teed sõlmest $(0,0)$ sõlme (m,n), mis läbivad sõlme (i,j). Seega jääb sõlme (i,j) eemaldamisel järele $C_{m+n}^{m} - C_{i+j}^{i} \cdot C_{m+n-i-j}^{m-i}$ lubatud teed sõlmest $(0,0)$ sõlme (m,n).

4. Milliste positiivse täisarvu d väärtuste korral on võimalik värvida kõik täisarvud punaseks ja siniseks nii, et ühegi kahe sinise arvu vahe ei oleks 1 ning ühegi kahe punase arvu vahe ei oleks d?

   Vastus: selline värvimine on võimalik parajasti siis, kui d on paaritu arv.

   Lahendus: Olgu kõigepealt täisarvud värvitud vastavalt ülesande tingimustele. Siis juhul kui arvud x ja $x+1$ oleksid mõlemad punased, peaksid arvud $x+d$ ja $x+d+1$ olema mõlemad sinised, mis ei ole võimalik. Järelikult ei saa ka kahe punase täisarvu vahe olla 1. Järelikult peavad olema arvud värvitud vaheldumisi punaseks ja siniseks ning seega ei saa d olla paarisarv.

   Teiselt poolt, kui d on paaritu ning värvime täisarvud vaheldumisi punaseks ja siniseks, on mõlemad ülesande tingimused täidetud.

5. Võrrandi $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ kolmeks lahendiks on $\tan\alpha$, $\tan\beta$ ja $\tan\gamma$, kus α, β ja γ on mingi kolmnurga nurgad. Leia selle võrrandi neljas lahend.

   Vastus: $\frac{r-p}{q-s-1}$.

   Lahendus: Olgu võrrandi neljandaks lahendiks k. Siis Viete'i valemitest järeldub:

   $$p = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma + k,$$

$$
\begin{aligned}
q &= \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha + k(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma)\,,\\
r &= k(\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha) + \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\,,\\
s &= k\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\,.
\end{aligned}
$$

Tähistame

$$T = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$$

(kontrollige, et selline seos kehtib mistahes kolmnurga nurkade tangensite vahel!) ning

$$S = \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha\ .$$

Siis saame ülaltoodud võrdused kirjutada kujul

$$
\begin{aligned}
p &= S + k\,,\\
q &= T + kS\,,\\
r &= kT + S\,,\\
s &= Sk\,.
\end{aligned}
$$

Siit saame $T + s = q$ ja $kT + p - k = r$, millest $k(q - s) + p - k = r$ ehk $k = \dfrac{r-p}{q-s-1}$.

Näitame veel, et $q-s-1 \neq 0$. Vastasel juhul oleks $q = s+1$ ning $T = 1$ ja $p = r$. Esialgne võrrand omandab siis kuju $x^4 - px^3 + qx^2 - px + q - 1 = 0$, mille lahendite hulgas on kompleksarvud $\pm i$. Kuna aga ülesande tingimuste kohaselt algsel võrrandil peab sellel võrrandil olema kolm (seega tegelikult neli) reaalarvulist lahendit, pole see võimalik.