

# Teaduskooli ülmastme kodutöö

Tähtaeg: 6. veebruar 2009

Komplekt A (ülesanded noorema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. Olgu  $a$ ,  $b$  ja  $c$  positiivsed reaalarvud. Tõesta võrratus

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

ning otsusta, millal kehtib samasus.

2. Tõesta, et võrrandi

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

lahendid on alati reaalarvulised mis tahes reaalarvude  $a$ ,  $b$  ja  $c$  korral.

3. Ruudu  $ABCD$  ümberringjoone kaarel  $CD$  on valitud punkt  $P$ . Tõesta, et

$$|PA| \cdot (|PA| + |PC|) = |PB| \cdot (|PB| + |PD|).$$

4. Ringjoon, mis läbib punkti  $A$ , lõikab rööpküliliku  $ABCD$  külgi  $AB$  ja  $AD$  ning diagonaali  $AC$  vastavalt punktides  $P$ ,  $R$  ja  $Q$ . Tõesta, et

$$|AP| \cdot |AB| + |AR| \cdot |AD| = |AQ| \cdot |AC|.$$

5. Leia kõik sellised naturaalarvude paarid  $(a, b)$ , mille korral

$$5^a - 2^b - 1 = 0.$$

6. Positiivsed täisarvud  $a$  ja  $b$ , kus  $a > b$ , rahuldavad tingimust

$$\left( \text{VÜK}(a, b) + \text{SÜT}(a, b) \right)^2 = (a + b)^2.$$

Tõesta, et arv  $a$  jagub arvuga  $b$ .

7. Tasandil on antud 17 punkti, mis on ühendatud omavahel mustade, punaste või siniste lõikudega selliselt, et ükski kolm punkti ei asu ühel sirgel ning iga kaks punkti on täpselt ühe lõiguga ühendatud. Tõesta, et leidub ühevärviline kolmnurk, mille tipud on antud 17 punkti hulgas.

8. Tõesta matemaatilise induktsiooni meetodil, et iga naturaalarvu  $n$  korral kehtib võrdus

$$1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

## Komplekt B (ülesanded vanema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. Vaatleme funktsioone  $f$ , mis on määratud täisarvude hulgal ja rahuldavad iga täisarvu  $x$  korral tingimust

$$f(x) = f(x^2 + x + 1).$$

Leia kõik niisugused  $a$ ) paarisfunktsioonid,  $b$ ) paaritud funktsioonid.

2. Olgu  $a$ ,  $b$  ja  $c$  sellised positiivsed reaalarvud, et  $abc = 1$ . Tõesta, et

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1.$$

3. On antud ringjoon  $S$  ning punktid  $A$  ja  $B$  temast väljaspool. Iga sirge  $l$  jaoks, mis läbib punkti  $A$  (kuid ei läbi punkti  $B$ ) ning lõikab ringjoont  $S$  punktides  $M$  ja  $N$ , vaatleme kolmnurga  $BMN$  ümberringjoont. Tõesta, et kõigil neil ringjoontel leidub punktist  $B$  erinev ühine lõikepunkt. Millisel erijuhul see väide siiski ei kehti?
4. Kolmnurga  $ABC$  külgedele  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  kui alustele on kolmnurgast  $ABC$  väljapoole joonistatud võrdhaarsed kolmnurgad  $BCD$ ,  $CAE$ ,  $ABF$ . Tõesta, et läbi punktide  $A$ ,  $B$ ,  $C$  vastavalt sirgetele  $EF$ ,  $FD$ ,  $DE$  tõmmatud ristsirged lõikuvad ühes punktis.
5. Algarv  $p$  ja positiivsed täisarvud  $a$  ja  $n$  on sellised, et  $2^p + 3^p = a^n$ . Tõesta, et  $n = 1$ .
6. Leia vähim selline naturaalarv  $n$ , et alati, kui valida täisarvude 1 kuni 2008 seast  $n$  arvu, mis on paarikaupa ühistegurita, leidub valitud arvude seas algarv.

7.  $v \cdot m$  kaardist koosnevas kaardipakis on  $m$  masti ja  $v$  väärtusega kaarte, igat masti ja iga väärtusega kaarte üks. Kaardid on laotud  $m$  korda  $v$  ristikülikuks. Tõesta, et leidub  $v$  kaarti, igas ristiküliku veerus üks, millel on erinevad väärtused.

**Märkus.** Võib kasutada järgmist Hall'i teoreemi (nn "abieluteoreemi"). Koolis on  $n$  tüdrukut ja  $n$  (või üldisemalt  $m \geq n$ ) poissi. Tüdrukud tahavad abielluda ainult poistega, keda nad tunnevad. Kui iga tüdrukute alamhulga jaoks leidub vähemalt sama suur hulk poisse, kes mõnda neist tüdrukutest tunnevad, siis saavad kõik tüdrukud abielluda.

8. Pärast revolutsiooni on riigis otsedemokraatia ning kõigi 66 elaniku (kaasa arvatud kuninga) kuupalk on 1 kroon. Kuningal ei ole enam õigust hääletada, aga ta saab teha muudatusettepanekuid: nimelt palkade ümberjaotamiseks. Kõigi elanike palk peab olema täisarv kroone ning palkade summa 66 krooni. Iga muudatusettepaneku üle hääletatakse ning see viiakse täide juhul, kui poolthääli on rohkem kui vastuhääli. Elanik hääletab poolt, kui tema palka tõstetakse, vastu kui vähendatakse ning ei hääleta, kui palk jäetakse samaks. Milline on maksimaalne palk, mille kuningas saab endale kindlustada, ning kui palju aega tal selleks kulub?