

## Koduülesanded matemaatikast: 3. komplekt, sügis 2008/09

Esitamise tähtaeg: 20. oktoober 2008

1. Polünoom  $P(x) = 2x^3 - 30x^2 + cx$  võtab kolme järjestikuse täisarvu  $i < j < k$  korral järjestikused täisarvulised väärtused  $P(i) < P(j) < P(k)$ . Leia need väärtused.
2. Klassis on 32 õpilast, iga õpilane saadab 16 klassikaaslasele kaardi. Tõesta, et leidub õpilaste paar, kes saatsid kaardi üksteisele.
3. Ringjoone kõõlud  $AA'$  ja  $BB'$  lõikuvad punktis  $P$ . Kolmnurga  $ABP$  ümberringjoon puutub kolmnurga  $A'B'P$  ümberringjoont. Tõesta, et  $AA' = BB'$ .

4. Funktsioonide jada  $f_n(x)$  on defineeritud järgmiselt:

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48}$$

ja

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)} \quad \text{iga } n \geq 1 \text{ korral.}$$

Iga positiivse täisarvu  $k$  jaoks leia kõik reaalarvud  $x$ , mille korral  $f_k(x) = 2x$ .

5. Tõesta, et iga positiivse täisarvu  $n$  jaoks leidub  $n$ -kohaline täisarv, mis jagub arvuga  $5^n$  ja mille kõik numbrid on paaritud.
6. Kabinetis asub 2004 telefoni; iga telefonide paar on omavahel ühendatud kaabliga, mis on värvitud kas roheliseks, siniseks, punaseks või kollaseks. Iga värvi jaoks leidub kaabel, mis on seda värvi. Kas alati on võimalik välja valida teatud hulk telefone nii, et nende omavahelistes kaabliühendustes esineb täpselt kolm värvi?
7. Leia kõik algarvude kolmikud  $(p, q, r)$ , mille korral  $p|q^r + 1$ ,  $q|r^p + 1$ ,  $r|p^q + 1$ .
8. Olgu  $ABC$  teravnurkne kolmnurk, kusjuures  $\angle ABC < \angle ACB$ . Olgu  $O$  kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone keskpunkt ja olgu  $D$  sirgete  $AO$  ja  $BC$  lõikepunkt. Tähistagu  $E$  ja  $F$  vastavalt kolmnurkade  $ABD$  ja  $ACD$  ümberringjoonte keskpunkte. Olgu  $G$  punkt lõigu  $AB$  pikendusel üle punkti  $A$  nii, et  $AG = AC$  ja olgu  $H$  punkt lõigu  $AC$  pikendusel üle punkti  $A$  nii, et  $AH = AB$ . Tõesta, et nelinurk  $EFGH$  on riskülik siis ja ainult siis kui  $\angle ACB - \angle ABC = 60^\circ$ .