Koduülesanded matemaatikast: 2. komplekt, sügis 2008/09

Esitamise tähtaeg: 5. oktoober 2008

1. Ringjoon c on kolmnurga ABC siseringjoon, mille puutepunktid külgedega AB ja AC on vastavalt D ja E. Lõigul AD valitakse punkt F ja lõigul AE valitakse punkt G nii, et lõik FG puutub ringjoont c punktis P. Punkt Q on kolmnurga AFG siseringjoone puutepunkt küljega FG. Tõesta, et $|FQ| = |PG|$.

2. Ühe vabariigi parlamendi kõik 100 saadikut on äraostetavad. Hääletamise ajal hääletab iga neist poolt või vastu selle põhjal, kumba valiku eest on talle rohkem makstud. Kui poolt ja vastu on talle makstud raha ühepalju, jääb saadik erapooletuks. Otsuse langetamiseks on vaja 51 poolthäält. Ärimees A soovib ühe seaduse vastuvõtmist. Ärimees B aga soovib selle läbikukkumist ning kulutab saadikute mõjutamiseks 1000 kuldmünti. Mitu kuldmünti peab vähemalt kulutama ärimees A, et parlament võtaks seaduse igal juhul vastu, sõltumata sellest, kuidas jaotab saadikute vahel oma kuldmündid ärimees B?

3. Reaalarvuliste väärtustega funkstioon f on määratud positiivsetel täisarvudel. Positiivne täiasarv a rahuldab järgmisi tingimusi:
   (i) $f(a) = f(99)$, $f(a+1) = f(100)$, $f(a+2) = f(101)$;
   (ii) $f(n+a) = \dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$ kõigi positiivsete täisarvude n korral.
   a) Tõesta, et $f(n+4a) = f(n)$.
   b) Leia vähim a väärtus, mille korral selline funktsioon f eksisteerib.

4. Positiivsete täisarvude jada a_n on määratud seostega

$$a_0 = m \quad \text{ja} \quad a_{n+1} = a_n^5 + 487$$

   iga $n \geqslant 0$ korral. Leia kõik m väärtused, mille korral jadas esinevate täisruutude arv on maksimaalne.

5. Tõesta, et suvalise positiivsete reaalarvude kogumi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jaoks leidub selline täisarv k, et $1 \leqslant k \leqslant n$ ja

$$\frac{k(k+1)}{a_k} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

6. Vaatleme fraasi

   NOWANDTHENBECOMEENTWINED

   On lubatud valida 5 suvalist tähte ja asendada iga neist järgmise tähega tähestikus (tähestik koosneb 26 tähest, tähele 'z' jaärgneb 'a'). Tee kidnlaks, kas niiviisi korduvalt tegutsedes on võimalik saada fraas

   PLAYINGGAMESWITHINMYMIND

7. Olgu $ABCD$ selline kõõlnelinurk, et $|AB| \cdot |DC| = |AD| \cdot |BC|$. Olgu E selline punktist A erinev punkt sirgel AC, et $|AC| = |CE|$, ja olgu F punktist A erinev kolmnurga ABE ümberringjjone lõikepunkt sirgega AD. Tõesta, et $2|AD| = |DF|$.