

# Koduülesanded matemaatikast: 1. komplekt, sügis 2008/09

Esitamise tähtaeg: 22. september 2008

1. Olgu  $a$  ja  $b$  reaalarvud. Tõesta, et

$$a^6 - 6ab^5 + 5b^6 \geq 0.$$

2. Olgu  $ABCD$  kumer nelinurk. Olgu  $F$  selline punkt sirgel  $AC$ , et sirged  $DF$  ja  $AB$  on paralleelsed, ning  $E$  selline punkt sirgel  $BD$ , et sirged  $AE$  ja  $CD$  on paralleelsed. Tõesta, et sirged  $EF$  ja  $BC$  on paralleelsed.
3. Tabelis on  $m$  veergu ja teatud arv ridu. Tabel on täidetud numbritega 0 ja 1 ning rahuldab järgmisi tingimusi:
- (i) igas reas on täpselt kolm numbrit 1;
  - (ii) iga kahe veeru jaoks leidub täpselt kaks rida, kus neis veergudes on kirjas 1-d.

Kas leidub tabel, mille korral

- a)  $m = 6$ ;
- b)  $m = 5$ ?

4. Kas leidub positiivne täisarv, mille ruudu numbrite summa on 2007?
5. Punkt  $I$  on kolmnurga  $ABC$  siseringjoone keskpunkt. Olgu  $A_1$ ,  $B_1$  ja  $C_1$  erinevad punktid kolmnurga  $ABC$  sees, mille korral on rahuldatud järgmised tingimused:
- (i) punktid  $A$ ,  $A_1$  ja  $B_1$  asuvad ühel sirgel, punktid  $B$ ,  $B_1$  ja  $C_1$  asuvad ühel sirgel, punktid  $C$ ,  $C_1$  ja  $A_1$  asuvad ühel sirgel;
  - (ii)  $\angle BAA_1 = \angle CBB_1 = \angle ACC_1$ ;
  - (iii)  $I$  on kolmnurga  $A_1B_1C_1$  siseringjoone keskpunkt.

Tõesta, et kolmnurk  $ABC$  on võrdkülgne.

6. Olgu  $k \leq 30000$  positiivne täisarv. Vaatleme sellist algarvude jada  $x_n$ , et  $x_n + k$  jagub arvuga  $x_{n+1}$  iga  $n$  korral. Tõesta, et leidub arv  $N$ , mille korral  $x_n \leq 420000$  kõigi  $n > N$  jaoks.
7. Lahenda võrrand

$$\cos^2 2007x + \frac{2 + \tan^4 x}{1 + \tan^4 x} = \frac{\tan 669x}{\tan 223x}.$$