Koduülesanded matemaatikast: 3. komplekt, sügis 2008/09

Ülesannete lahendused

1. Polünoom $P(x) = 2x^3 - 30x^2 + cx$ võtab kolme järjestikuse täisarvu $i < j < k$ korral järjestikused täisarvulised väärtused $P(i) < P(j) < P(k)$. Leia need väärtused.

   Vastus: 244, 245 ja 246.

   Lahendus. Vastavalt ülesande tingimustele on $P(j-1)$, $P(j)$ ja $P(j+1)$ järjestikused täisarvud. Seega

$$P(j) - P(j-1) = 6j^2 - 54j - 28 + c = 1, \tag{1}$$
$$P(j+1) - P(j) = 6j^2 - 66j + 32 + c = 1. \tag{2}$$

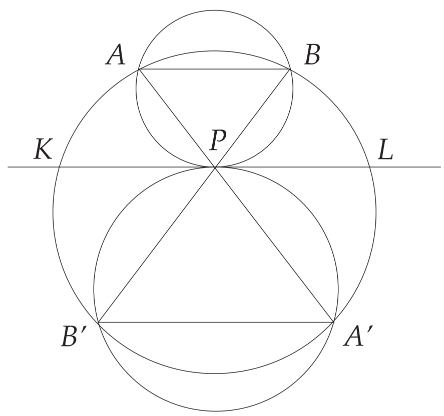
   Lahutades võrduse (2) võrdusest (1) leiame, et $12j - 60 = 0$, millest $j = 5$. Võrdus (1) annab nüüd $c = 149$. Lõpuks saame välja arvutada $P(4) = 244$, $P(5) = 245$, $P(6) = 246$.

2. Klassis on 32 õpilast, iga õpilane saadab 16 klassikaaslasele kaardi. Tõesta, et leidub õpilaste paar, kes saatsid kaardi üksteisele.

   Lahendus 1. Kokku saatsid õpilased $32 \cdot 16$ kaarti, õpilaste paare on kokku aga ainult $\frac{32 \cdot 31}{2} = 31 \cdot 16$. Nüüd Dirichlet' printsiibi kohaselt peab leidma õpilaste paar, kes saatsid kaardi üksteisele.

   Lahendus 2. Kui iga õpilane saadab kaardi 16 klassikaaslasele, siis iga õpilane saab teistelt keskmiselt 16 kaarti. Järelikult peab leiduma õpilane, kes sai kaardi vähemalt 16 klassikaaslase käest. Kui ta ühelegi neist ise kaarti ei oleks saatnud, saaks ta saata ülimalt 31-16=15 kaarti, mis oleks vastuolu. Seega leidub õpilaste paar, kes saatsid kaardi üksteisele.

3. Ringjoone kõõlud AA' ja BB' lõikuvad punktis P. Kolmnurga ABP ümberringjoon puutub kolmnurga $A'B'P$ ümberringjoont. Tõesta, et $AA' = BB'$.



   Lahendus 1. Lõikagu kolmnurkade ümberringjoonte ühine puutuja nelinurga $ABA'B'$ ümberringjoone kaart AB' punktis K ja kaart $A'B$ punktis L (vt joonist). Nüüd rakendades kaks korda teoreemi lõikajast ja puutujast saame võrduste ahela

$$\angle ABP = \angle APK = \angle A'PL = \angle A'B'P.$$

   Võrdsed piirdenurgad annavad meile

$$\angle ABP = \angle ABB' = \angle AA'B = \angle PA'B'$$

ja

$$\angle A'B'P = \angle A'B'B = \angle A'AB = \angle PAB.$$

Neist kolmest võrdusest saame $\angle ABP = \angle PAB = \angle PA'B' = \angle A'B'P$. Järelikult on kolmnurgad PAB ja $PA'B'$ võrdhaarsed, seega $AP = BP$ ja $PA' = PB'$, millest omakorda $AA' = BB'$.

Lahendus 2. Olgu O kolmnurga ABP ümberringjoone keskpunkt ja O' kolmnurga $A'B'P$ ümberringjoone keskpunkt. Kuna ringjooned puutuvad, siis asuvad punktid O, P ja O' ühel sirgel. Järelikult on $\angle APO$ ja $\angle A'PO'$ tipunurgad ja seega omavahel võrdsed. Kuna lisaks on kolmnurgad APO ja $A'PO'$ võrdhaarsed, siis nad on sarnased. Sarnasusest saame $\frac{AP}{A'P} = \frac{OP}{O'P}$. Analoogiliselt on kolmnurgad BPO ja $B'PO'$ sarnased, millest $\frac{BP}{B'P} = \frac{OP}{O'P}$. Seega

$$\frac{AP}{A'P} = \frac{BP}{B'P}. \tag{3}$$

Teiselt poolt, kuna AA' ja BB' on ringjoone kõõlud, siis

$$AP \cdot A'P = BP \cdot B'P. \tag{4}$$

Korrutades võrdused (3) ja (4) omavahel läbi, saame $AP^2 = BP^2$ ehk $AP = BP$. Siit omakorda $AP' = BP'$. Liites saamegi $AA' = BB'$.

Märkus. Kehtib ka ülesande üldistus kolmemõõtmelise juhu jaoks, kus ringjoonte asemel esinevad sfäärid. Sellega soovitame tutvuda aadressil
http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?p=143449

4. Funktsioonide jada $f_n(x)$ on defineeritud järgmiselt:

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48}$$

ja

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)} \quad \text{iga } n \geqslant 1 \text{ korral.}$$

Iga positiivse täisarvu k jaoks leia kõik reaalarvud x, mille korral $f_k(x) = 2x$.

Vastus: iga k jaoks on $x = 4$ ainuke lahend.

Lahendus: http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?p=356624

5. Tõesta, et iga positiivse täisarvu n jaoks leidub n-kohaline täisarv, mis jagub arvuga 5^n ja mille kõik numbrid on paaritud.

Lahendus: http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?p=336189

6. Kabinetis asub 2004 telefoni; iga telefonide paar on omavahel ühendatud kaabliga, mis on värvitud kas roheliseks, siniseks, punaseks või kollaseks. Iga värvi jaoks leidub kaabel, mis on seda värvi. Kas alati on võimalik välja valida teatud hulk telefone nii, et nende omavahelistes kaabliühendustes esineb täpselt kolm värvi?

Vastus: jah.

Lahendus: http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?p=17847

7. Leia kõik algarvude kolmikud (p, q, r), mille korral $p|q^r + 1$, $q|r^p + 1$, $r|p^q + 1$.

Vastus: $(2,5,3)$, $(5,3,2)$ ja $(3,2,5)$.

Lahendus: http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?p=357351

8. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, kusjuures $\angle ABC < \angle ACB$. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ja olgu D sirgete AO ja BC lõikepunkt. Tähistagu E ja F vastavalt kolmnurkade ABD ja ACD ümberringjoonte keskpunkte. Olgu G punkt lõigu AB pikendusel üle punkti A nii, et $AG = AC$ ja olgu H punkt lõigu AC pikendusel üle punkti A nii, et $AH = AB$. Tõesta, et nelinurk $EFGH$ on ristkülik siis ja ainult siis kui $\angle ACB - \angle ABC = 60^\circ$.

   Lahendus: http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?p=205737