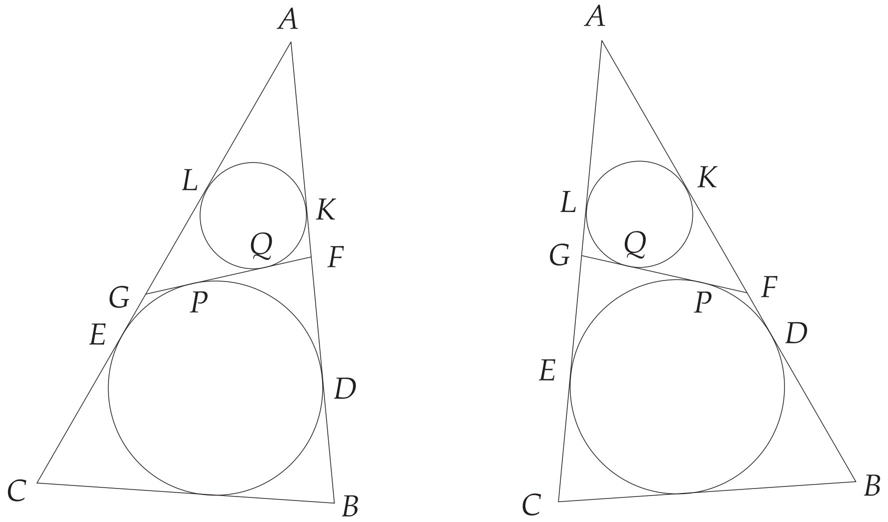
Koduülesanded matemaatikast: 2. komplekt, sügis 2008/09

Ülesannete lahendused

1. Ringjoon c on kolmnurga ABC siseringjoon, mille puutepunktid külgedega AB ja AC on vastavalt D ja E. Lõigul AD valitakse punkt F ja lõigul AE valitakse punkt G nii, et lõik FG puutub ringjoont c punktis P. Punkt Q on kolmnurga AFG siseringjoone puutepunkt küljega FG. Tõesta, et $|FQ| = |PG|$.



Lahendus 1. Olgu K ja L kolmnurga AFG siseringjoone puutepunktid vastavalt külgedega AF ja AG.

Kuna AD ja AE on puutujalõigud, siis $|AD| = |AE|$. Analoogselt kehtivad võrdused $|AK| = |AL|$, $|FD| = |FP|$, $|FK| = |FQ|$, $|GE| = |GP|$, $|GL| = |GQ|$. Nüüd

$$|AD| = |AE| \Leftrightarrow |AK| + |KF| + |FD| = |AL| + |LG| + |GE|$$
$$\Leftrightarrow |KF| + |FD| = |LG| + |GE| \Leftrightarrow |FQ| + |FP| = |GQ| + |GP|.$$

Nüüd sõltuvalt sellest, kas punktile F on lähemal punkt Q või P (vt joonised), kehtib kas

$$|FP| = |FQ| + |PQ|, \quad |GQ| = |GP| + |PQ|$$

või

$$|FP| = |FQ| - |PQ|, \quad |GQ| = |GP| - |PQ|.$$

Mõlemal juhul

$$|FQ| + |FP| = |GQ| + |GP| \Leftrightarrow 2|FQ| = 2|GP| \Leftrightarrow |FQ| = |GP|.$$

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 jõuame võrduseni $|FQ|+|FP| = |GQ|+|GP|$. Ilmselt kehtib ka võrdus $|FQ| + |GQ| = |FP| + |GP|$. Nende kahe võrduse liitmisel saame $2|FQ| = 2|GP|$ ehk $|FQ| = |GP|$.

2. Ühe vabariigi parlamendi kõik 100 saadikut on äraostetavad. Hääletamise ajal hääletab iga neist poolt või vastu selle põhjal, kumba valiku eest on talle rohkem makstud. Kui poolt ja vastu on talle makstud raha ühepalju, jääb saadik erapooletuks. Otsuse langetamiseks on vaja 51 poolthäält. Ärimees A soovib ühe seaduse vastuvõtmist. Ärimees B aga soovib selle läbikukkumist ning kulutab saadikute mõjutamiseks 1000 kuldmünti. Mitu kuldmünti peab vähemalt kulutama ärimees A, et parlament võtaks seaduse igal juhul vastu, sõltumata sellest, kuidas jaotab saadikute vahel oma kuldmündid ärimees B?

Vastus: 2051

Lahendus. Järjestame ärimehe A poolt makstavad pistised kasvamise järjekorras:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_{100}.$$

Kui ärimees B maksab pistised $a_1, \ldots a_{50}$ samadele saadikutele, kellele maksis ärimees A, siis jäävad nad kõik erapooletuks ning eelnõu kukub läbi. Seega kui $\sum_{i=1}^{50} a_i \leqslant 1000$, saab ärimees B alati hääletust nurjata. Samas on selge, et juhul $\sum_{i=1}^{50} a_i > 1000$ ei ole ärimehel B võimalust mõjutada 50 saadiku hääletamist. Järelikult seaduse kindlaks vastuvõtmiseks on tarvilik ja piisab, kui ärimees A suudab jaotada kuldmüntid nii, et $\sum_{i=1}^{50} a_i \geqslant 1001$. Kõige odavam on tema jaoks jagada täpselt 1001 kuldmünti.

Kui $\sum_{i=1}^{50} a_i = 1001$, siis on selge, et $a_{50} \geqslant 21$. Kuna $a_{50} \leqslant a_{51} \leqslant \ldots \leqslant a_{100}$, siis kõige odavam võimalus ärimehe A jaoks on $a_{50} = a_{51} = \ldots = a_{100} = 21$. Kokku kulutaks A saadikute mõjutamisele seega $10001 + 50 \cdot 21 = 2051$ kuldmünti.

Näitame lõpuks, et ärimehel A on võimalik jaotada mündid selliselt, et $\sum_{i=1}^{50} a_i = 1001$ ja $a_{50} = 21$. Seda saab teha näiteks nii: $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 14$, $a_4 = \ldots = a_{50} = 21$.

3. Reaalarvuliste väärtustega funkstioon f on määratud positiivsetel täisarvudel. Positiivne täiasarv a rahuldab järgmisi tingimusi:
   (i) $f(a) = f(99)$, $f(a+1) = f(100)$, $f(a+2) = f(101)$;
   (ii) $f(n+a) = \dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$ kõigi positiivsete täisarvude n korral.
   a) Tõesta, et $f(n+4a) = f(n)$.
   b) Leia vähim a väärtus, mille korral selline funktsioon f eksisteerib.

Vastus: b) $a = 3$.

Lahendus. a) Rakendame korduvalt valemit (ii):

$$f(n+2a) = f((n+a)+a) = \frac{\frac{f(n)-1}{f(n)+1} - 1}{\frac{f(n-1)}{f(n+1)} + 1} = -\frac{1}{f(n)},$$

$$f(n+4a) = f((n+2a)+2a) = -\frac{1}{-\frac{1}{f(n)}} = f(n).$$

b) Kui $a = 1$, siis $f(1) = f(a) = f(99) = f(3 + 24 \cdot 4a) = f(3) = f(1+2a) = -\dfrac{1}{f(1)}$. Seega $f(1)^2 = -1$, mis ei ole võimalik.

Kui $a = 2$, siis $f(2) = f(a) = f(99) = f(3 + 12 \cdot 4a) = f(3) = f(a+1) = f(100) = f(4 + 12 \cdot 4a) = f(4) = f(2+a) = \dfrac{f(2)-1}{f(2)+1}$. Seega $f(2)^2 + f(2) = f(2) - 1$, ehk $f(2)^2 = -1$, mis jällegi ei ole võimalik.

Näitame, et $a = 3$ korral sobilik funktsioon leidub. Defineerime iga täisarvu k jaoks funktsiooni f järgmiselt:

$$f(1+12k) = f(2+12k) = f(3+12k) = 2,$$

$$f(4+12k) = f(5+12k) = f(6+12k) = \frac{1}{3},$$

$$f(7+12k) = f(8+12k) = f(9+12k) = -\frac{1}{2},$$

$$f(10+12k) = f(11+12k) = f(12+12k) = -3.$$

On lihtne näha, et selle funksiooni korral on tingimused (i) ja (ii) mõlemad täidetud.

Märkus. Näite konstrueerimiseks $a = 3$ jaoks piisab valida väärtused $f(1)$, $f(2)$ ja $f(3)$, ülejäänud argumentide korral on funkstioon üheselt leitav tingimusest (ii). Siiski need väärtused ei tohi valida päris suvaliselt, näiteks $f(1) = -1$ korral ei ole $f(4)$ määratud.

4. Positiivsete täisarvude jada a_n on määratud seostega

$$a_0 = m \quad \text{ja} \quad a_{n+1} = a_n^5 + 487$$

iga $n \geqslant 0$ korral. Leia kõik m väärtused, mille korral jadas esinevate täisruutude arv on maksimaalne.

Vastus: $m = 9$.

Lahendus. Vaatleme avaldist $x^5 + 487$ mooduli 4 järgi:

$$\begin{aligned} x \equiv 0: &\quad x^5 + 487 \equiv 3, \\ x \equiv 1: &\quad x^5 + 487 \equiv 0, \\ x \equiv 2: &\quad x^5 + 487 \equiv 3, \\ x \equiv 3: &\quad x^5 + 487 \equiv 2. \end{aligned}$$

Täisarvu ruut annab 4-ga jagades jäägiks kas 0 või 1. Seega kui jadas esineb paarisarvuline ruut, siis kõik järgnevad liikned annavad 4-ga jagamisel jäägiks kas 2 või 3 ning pole ise täisruudud. Kui jadas esineb paarituarvuline täisruut, siis järgmine liige saaks veel olla täisruut, kuid ükski ülejäänud liikmetest ei oleks. Seega maksimaalne täisruutude arv jadas on ülimalt kaks, kusjuures need peavad olema kaks esimest liiget (sest ükski liige alates a_1-st ei saa olla kongruetne 1-ga mooduli 4 järgi).

Tähistame $a_0 = k^2$ ja $a_1 = n^2$, siis $n^2 = k^{10} + 487$. Tegurdamine nüüd annab $(n - k^5)(n + k^5) = 487$. Kuna 487 on algarv, siis $n - k^5 = 1$ ja $n + k^5 = 487$, kust $n = 244$ ja $k = 3$. Järelikult ainus vastus on $m = 3^2 = 9$.

5. Tõesta, et suvalise positiivsete reaalarvude kogumi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jaoks leidub selline täisarv k, et $1 \leqslant k \leqslant n$ ja

$$\frac{k(k+1)}{a_k} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Lahendus. Oletame vastuväiteliselt, et sellist arvu k ei leidu. Siis iga k korral

$$\frac{k(k+1)}{a_k} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Jagame läbi arvuga $k(k+1)$ ja summeerime üle kõigi k väärtuste:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Nüüd

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

see annab vastuolu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

6. Vaatleme fraasi

   NOWANDTHENBECOMEENTWINED

   On lubatud valida 5 suvalist tähte ja asendada iga neist järgmise tähega tähestikus (tähestik koosneb 26 tähest, tähele 'z' jaärgneb 'a'). Tee kidnlaks, kas niiviisi korduvalt tegutsedes on võimalik saada fraas

   PLAYINGGAMESWITHINMYMIND

   Vastus: on võimalik.

   Lahendus. Näitame, et me alati saame suurendada mingit tähte ühe võrra, jättes teised tähed muutmata. Nii korduvalt tehes õnnestub igast etteantud fraasist saada suvaline teine fraas.

   Paneme tähele, et fraasis on 24 tähte. Seega saame 5 korda valida 5 tähte nii, et kõik tähed fraasis suurenevad ühe võrra välja arvatud mingi üks täht, mis suureneb kahe võrra, kusjuures see täht on meie poolt vabalt valitav. Kordame seda protseduuri 24 korda, valides täheks, mis suureneb kahe võrra, iga kord erineva tähe. Tulemuseks saame fraasi, milles on kõik tähed suurenenud 25 võrra. Kordame veel protseduuri nii, et kahe võrra suureneks täht, mida meil tarvis muuta on. Nii on see täht suurenenud kokku 27 võrra, ehk saanud kokkuvõttes ühe võrra suuremaks, ülejäänud tähed aga 26 võrra ning taastanud oma esialgse kuju.

   Märkus. Inglise tähestiku puhul tuleb ülesandes antud fraasi saamiseks valida minimaalselt 59 täheviisikut.

7. Olgu $ABCD$ selline kõõlnelinurk, et $|AB| \cdot |DC| = |AD| \cdot |BC|$. Olgu E selline punktist A erinev punkt sirgel AC, et $|AC| = |CE|$, ja olgu F punktist A erinev kolmnurga ABE ümberringjjone lõikepunkt sirgega AD. Tõesta, et $2|AD| = |DF|$.

   Lahendus. Ptolemaiose teoreemi põhjal kehtib

   $$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = 2|AD| \cdot |BC|.$$

   Kuna $ABEF$ on kõõlnelinurk, siis $\angle DFB = \angle AFB = \angle AEB$. Et $ABCD$ on kõõlnelinurk, siis $\angle FDB = \pi - \angle ADB = \pi - \angle ACB = \angle BCE$. Siit näeme, et kolmnurgad DFB ja CEB on sarnased, seega $\frac{|DF|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|BC|}$. Nüüd avaldame $|DF|$:

   $$|DF| = \frac{|CE| \cdot |BD|}{|BC|} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC|} = \frac{2|AD| \cdot |BC|}{|BC|} = 2|AD|.$$