# Koduülesanded matemaatikast: 1. komplekt, sügis 2008/09

## Ülesannete lahendused

1. Olgu $a$ ja $b$ reaalarvud. Tõesta, et

$$a^6 - 6ab^5 + 5b^6 \geqslant 0.$$

*Lahendus 1.* Kasutame aritmeetilise ja geoeetrilise keskmise vahelise võrratust:

$$a^6 + 5b^6 = a^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6 \geqslant 6\sqrt[n]{a^6 b^{6\cdot 5}} = 6|ab^5| \geqslant 6ab^5.$$

*Lahendus 2.* Kui üka arvudest $a$ või $b$ võrdub nulliga, on võrratus ilmne. Kui üks neist arvudest on positiivne, teine aga negatiivne, siis arvud $a^6$, $-6ab^5$ ja $5b^6$ on kõik positiivsed ning võrratus kehtib.

Kui $a$ ja $b$ on mõlemad negatiivsed, siis $a$ ja $b$ asendamine nende vastandarvudega ei muudaks vasaku poole väärtust. Seega piisab vaadelda juhtu $a > 0$ ja $b > 0$.

Võrratuse vasaku poole tegudramine nüüd annab

$$\begin{aligned} a^6 - 6ab^5 + 5b^6 &= (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + a^4b - 5b^5) = \\ &= (a-b)^2(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 4ab^3 + 5b^4) \geqslant 0. \end{aligned}$$

2. Olgu $ABCD$ kumer nelinurk. Olgu $F$ selline punkt sirgel $AC$, et sirged $DF$ ja $AB$ on paralleelsed, ning $E$ selline punkt sirgel $BD$, et sirged $AE$ ja $CD$ on paralleelsed. Tõesta, et sirged $EF$ ja $BC$ on paralleelsed.

*Lahendus.* Kolmnurgad $DPF$ ja $BPA$ on sarnased, kuna $DF$ ja $AB$ on paralleelsed. Seega kehtib

$$\frac{DP}{FP} = \frac{BP}{AP}.$$

Samuti on kolmnurgad $APE$ ja $CPD$ sarnased, kuna $AE$ ja $CD$ on paralleelsed. Järelikult

$$\frac{CP}{DP} = \frac{AP}{EP}.$$

Nende kahe võrratuse läbikorrutamine annab

$$\frac{CP}{FP} = \frac{BP}{EP}.$$

Kiirte teoreemi põhjal on nüüd $EF$ ja $BC$ paralleelsed.

3. Tabelis on $m$ veergu ja teatud arv ridu. Tabel on täidetud numbritega 0 ja 1 ning rahuldab järgmisi tingimusi:

   (i) igas reas on täpselt kolm numbrit $1$;
   (ii) iga kahe veeru jaoks leidub täpselt kaks rida, kus neis veergudes on kirjas $1$-d.

   Kas leidub tabel, mille korral

   a) $m = 6$;
   b) $m = 5$?

   *Vastus:* a) jah; b) ei.

*Lahendus.* a) Näide tabeli jaoks, kus $m = 6$, on toodud allpool:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

b) Igas reas on täselt 3 ühtede paari. Seega $n$ reas on $3n$ sellist paari. Kui $m = 5$, siis leidub üldse 10 veergude paari. Vastavalt ülesande tingimustele peab siis leiduma $2 \cdot 10$ ühtede paari, järelikult $3n = 20$. Kuid $n = 20/3$ ei ole täisarv, vastuolu.

4. Kas leidub positiivne täisarv, mille ruudu numbrite summa on 2007?

   *Vastus:* jah.

   *Lahendus 1.* Vaatleme arvu $A = 10^{223} - 1$. Tema ruut

$$A^2 = 10^{223\cdot 2} - 2 \cdot 10^{223} + 1 = \underbrace{99\ldots99}_{222 \text{ numbrit}}\ 8\ \underbrace{00\ldots00}_{222 \text{ numbrit}}\ 1.$$

   Arvu $A^2$ numbrite summa on seega $9 \cdot 222 + 8 + 1 = 2007$.

   *Lahendus 2.* Vaatleme arvu $B = \underbrace{33\ldots33}_{223 \text{ numbrit}}$. Tema ruut

$$B^2 = \underbrace{99\ldots99}_{223 \text{ numbrit}} \cdot \underbrace{11\ldots11}_{223 \text{ numbrit}} = (10^{223} - 1) \cdot \underbrace{11\ldots11}_{223 \text{ numbrit}} =$$
$$= \underbrace{11\ldots11}_{223 \text{ numbrit}}\ \underbrace{00\ldots00}_{223 \text{ numbrit}} - \underbrace{11\ldots11}_{223 \text{ numbrit}} = \underbrace{11\ldots99}_{222 \text{ numbrit}}\ 0\ \underbrace{88\ldots88}_{222 \text{ numbrit}}\ 9.$$

   Arvu $B^2$ numbrite summa on seega $1 \cdot 222 + 8 \cdot 222 + 9 = 2007$.

5. Punkt $I$ on kolmnurga $ABC$ siseringjoone keskpunkt. Olgu $A_1$, $B_1$ ja $C_1$ erinevad punktid kolmnurga $ABC$ sees, mille korral on rahuldatud järgmised tingimused:
   (i) punktid $A$, $A_1$ ja $B_1$ asuvad ühel sirgel, punktid $B$, $B_1$ ja $C_1$ asuvad ühel sirgel, punktid $C$, $C_1$ ja $A_1$ asuvad ühel sirgel;
   (ii) $\angle BAA_1 = \angle CBB_1 = \angle ACC_1$;
   (iii) $I$ on kolmnurga $A_1B_1C_1$ siseringjoone keskpunkt.

   Tõesta, et kolmnurk $ABC$ on võrdkülgne.

   *Lahendus.* Paneme kõigepealt tähele, et on olemas kaks võimalust, kuidas paiknevad sirgel punktid: punkt $A_1$ asub punktide $A$ ja $B_1$ vahel, või $B_1$ asub punktide $A$ ja $A_1$ vahel. Mõlemad juhud üheselt määravad järjestuse ka ülejäänud puknktikolmikute sees.

   Kolmnurga $A_1B_1C_1$ küljed asuvad sirgetel, mis on saadud kolmnurga $ABC$ külgi sisaldavate sirgete pööramisel ühe ja sama nurga võrra. Seega on need kolmnurgad sarnased. Kuna neil on ühine siseringjoone keskpunkt $I$, siis sõltuvalt punktide $A$, $A_1$ ja $B_1$ omavahelisest paiknemisest kas $\angle IB_1A = \angle IB_1A_1 = \angle IBA$ või $\angle IB_1A = \pi - \angle IB_1A_1 = \pi - \angle IBA$. Mõlemal juhul asuvad punktid $A$, $I$, $B_1$ ja $B$ ühel ringjoonel. Sellest tulenevalt nüüd $\angle CBB_1 = \angle BAA_1 = \angle BAB_1$, järelikult puutuja ja lõikaja teoreemi kohaselt on $BC$ selle ringjoone puutuja. Nüüd omakorda $\angle CBI = \angle C_1B_1I = \angle BAI$. Seega $\angle CBA = 2\angle CBI = 2\angle BAI = \angle BAC$. Analoogiliselt saame $\angle ACB = \angle CBA$. Järelikult on kolmnurk $ABC$ võrdkülgne.

6. Olgu $k \leqslant 30000$ positiivne täisarv. Vaatleme sellist algarvude jada $x_n$, et $x_n + k$ jagub arvuga $x_{n+1}$ iga $n$ korral. Tõesta, et leidub arv $N$, mille korral $x_n \leqslant 420000$ kõigi $n > N$ jaoks.

*Lahendus.* Olgu $p$ vähim algarv, millega ei jagu arv $k$. Siis $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, sest $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030 > k$. Üldisust kitsendamata eeldame, et $x_1 > 420000$. Siis on selge, et

(1) kõigi $s$ ja $n$ korral arv $x_n + sk$ ei jagu ühegi algarvuga, mis on väiksem $p$-st;
(2) jada $x_n$ ei sisalda arvust $p$ väiksemaid algarve.

Nimetame arvu $x_{n+1}$ *huvitavaks* kui $x_n + k$ ei ole algarv. Sel juhul on $x_n + k$ vähim algtegur vähemalt $p$ ning seega $x_{n+1} \leqslant (x_n + k)/p$.

Huvitavad arvud kindlasti leiduvad, sest jada $x_1 + kn$ ei saa koosneda üksnes algarvudest. Olgu $x_m$ huvitav arv. Kuna $p$ ja $k$ on ühistegurita, siis vähemalt üks arvudest

$$x_m + k,\ x_m + 2k,\ \ldots,\ x_m + pk$$

jagub $p$-ga; tähistame vähimat mittealgarvulist arvu selles kogumis $x_m + sk$. Siis

$$x_{m+1} = s_m + k, \ldots, x_{m+s-1} = x_m + (s-1)k;$$

$x_{m+s}$ on järgmine huvitav arv, seejuures

$$x_{m+s} \leqslant \frac{x_{m+s-1} + k}{p} = \frac{x_m + sk}{p} \leqslant \frac{x_m + pk}{p} = k + \frac{x_m}{p} \leqslant k + \frac{x_m}{2}.$$

Näeme, et kui $x_m > 2k$, siis $x_{m+s} < x_m$. Järelikult kordades seda konstruktsiooni leiame huvitava arvu $x_l < 2k < 60000$. Eelmise võrratuse põhjal näeme, et kui $x_m \leqslant 2k$, siis ka $x_{m+s} \leqslant 2k$.

Seega varem või hiljem ei ületa huvitavad arvud $60000$. Kuid siis ei ületa arvud $x_k$ nende huvitavate arvutde vahel $420000$. Tõepoolest, kui $t \leqslant s - 1$, siis

$$x_{m+t} = x_m + tk \leqslant x_m + 12k \leqslant 60000 + 12 \cdot 30000 = 420000.$$

7. Lahenda võrrand

$$\cos^2 2007x + \frac{2 + \tan^4 x}{1 + \tan^4 x} = \frac{\tan 669x}{\tan 223x}.$$

*Vastus:* võrrandil lahendeid ei ole.

*Lahendus.* Teisendame võrrandi mõlemad pooled. Vasak pool teiseneb

$$\cos^2 2007x + \frac{2 + \tan^4 x}{1 + \tan^4 x} = \cos^2 2007x + 1 + \frac{1}{1 + \tan^4 x};$$

ning parem pool

$$\begin{aligned}\frac{\tan 669x}{\tan 223x} &= \frac{\sin 669x \cos 223x}{\cos 669x \sin 223x} = \frac{\cos 223x(3\sin 223x \cos^2 223x - \sin^3 223x)}{\sin 223x(\cos^3 223x - 3\sin^2 223x \cos 223x)} = \\ &= \frac{3\cos^2 223x - \sin^2 223x}{\cos^2 223x - 3\sin^2 223x} = \frac{\cos^2 223x - 3\sin^2 223x + 2}{\cos^2 223x - 3\sin^2 223x} = \\ &= 1 + \frac{2}{\cos^2 223x - 3\sin^2 223x}.\end{aligned}$$

Seega

$$\cos^2 2007x + \frac{1}{1 + \tan^4 x} = \frac{2}{\cos^2 223x - 3\sin^2 223x}.$$

Võrrandi vasak pool on positiivne, seega peab ka võrrandi parem pool olema positiivne. Paneme tähele, et parema poole nimeteja maksimaalne väärtus on $1$, seega kogu parema poole minimaalne väärtus on $2$. Kuna $\cos^2 2007x$ maksimaalne väärtus on $1$ ja $\tan^4 x$ minimaalne väärtus on $0$, on võrrandi vasaku poole maksimaalne väärtus $2$. Seega peavad võrrandi mõlemad pooled olema võrdsed $2$-ga. Selleks peab kehtima $\tan^4 x = 0$, mis tähendab, et $x = n\pi$, kus $n$ on täisarv. Kuid sellisel juhul $\tan 223x = 0$, mis on esialgse võrrandiga vastuolus. Järelikult võrrandil lahendid puuduad.