

Koduseid ülesandeid IMO-2009 võistkonnale: geomeetria

Tähtaeg: 26. juuni 2009

1. Tõesta, et sama übermõõduga kolmnurkadest on suurim pindala võrdkülgisel.
2. Olgu r ja R vastavalt kolmnurga sise- ja ümberringjoone raadius. Tõesta, et $R \geq 2r$ (*Euleri võrratus*).
3. Kolmnurga ABC ümberringjoonel võetakse punkt P . Punktist P tõmmatakse ristlõigud sirgetele AB , BC ja CA . Tõesta, et nende ristlõikude aluspunktid asuvad ühel sirgel (*Simsoni sirge*).
4. Tõesta, et kolmnurga ümberringjoone keskpunkt, kõrguste lõikepunkt ja medaanide lõikepunkt asuvad ühel sirgel (*Euleri sirge*).
5. Tasandil on antud kolm ringjoont, mille keskpunktid ei asu ühel sirgel. Tõesta, et nende ringjoonte paaride radikaalteljed läbivad ühte punkti (*radikaalkese*).
6. Tõesta *Ceva teoreem*: Olgu kolmnurga ABC külgedel AB , BC ja AC võetud vastavalt punktid C_1 , A_1 ja B_1 . Sirged AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis parajasti siis, kui

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

7. Tõesta *Menelaose teoreem*: Olgu kolmnurga ABC külgedel AB , BC ja AC või nende pikendustel (kuid mitte tippudes) võetud vastavalt punktid C_1 , A_1 ja B_1 , kusjuures pikendustel olgu võetud neist punktidest üks või kõik kolm. Punktid A_1 , B_1 ja C_1 asuvad ühel sirgel parajasti siis, kui

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1,$$

kus lõike mõistame suunatudena ning samasihiliste lõikude pikkuste jagatise märgiks loeme $+$ ning erisihilistel $-$.

8. Tõesta *Ptolemaoise teoreem*: Kõlnelinurgas $ABCD$ kehtib

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

- 9*. Tõesta *liblika teoreem*: Ringjoone kõõlu PQ keskpunktis M lõikuvad kõõlud AB ja CD . Punktid X ja Y on kõõlu PQ lõikepunktid vastavalt kõõludega AD ja BC . Siis M on lõigu XY keskpunkt.
- 10*. Tõesta *Poncelet' teoreem*: Olgu \mathcal{C}_1 ja \mathcal{C}_2 vastavalt kolmnurga ABC sise- ja ümberringjoon. Mistahes punkti A' jaoks ringjoonel \mathcal{C}_2 leiduvad sellised punktid B' ja C' , et \mathcal{C}_1 ja \mathcal{C}_2 on kolmnurgale $A'B'C'$ vastavalt sise- ja ümberringjooneks.
- 11*. Tõesta *Brianchoni teoreem*: Kui kuusurga $ABCDEF$ sisse saab joonestada ringjoone, siis lõikuvad diagonaalid AD , BE ja CF ühes punktis.