Koduseid ülesandeid IMO-2009 võistkonnale: 2. komplekt

Tähtaeg: 11. juuni 2009

1. Tasandil paikneb n punkti ($n > 3$), neist ükski kolm ei asu ühel sirgel. Tõesta, et kõigi kolmnurkade hulgas on teravnurkseid ülimalt kolm neljandikku.

2. a) Kas leiduvad sellised positiivsed täisarvud $a_1 < a_2 < \ldots, < a_{100}$, et

   $$\text{SÜT}(a_1, a_2) > \text{SÜT}(a_2, a_3) > \ldots > \text{SÜT}(a_{99}, a_{100})?$$

   b) Kas leiduvad sellised positiivsed täisarvud $a_1 < a_2 < \ldots, < a_{100}$, et

   $$\text{VÜK}(a_1, a_2) > \text{VÜK}(a_2, a_3) > \ldots > \text{VÜK}(a_{99}, a_{100})?$$

3. Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid D, E ja F nii, et lõikudel AD, BE ja CF on ühine punkt P. Olgu $\dfrac{|AP|}{|PD|} = x$, $\dfrac{|BP|}{|PE|} = y$ ja $\dfrac{|CP|}{|PF|} = z$. Tõesta, et $xyz - (x + y + z) = 2$.

4. On teada, et x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 on mittenegatiivsed reaalarvud ja $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Leida avaldise $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$ suurim võimalik väärtus.

5. Kaht kümnekohalist arvu nimetame *naaberarvudeks*, kui neil on täpselt ühel kohal erinev number. Maksimaalselt mitu kümnekohalist arvu võib välja kirjutada nii, et nende hulgas poleks naaberarve?

6. Ühikkuubiku kõik tahud värvitakse kas mustaks või valgeks. Ühikkuubik asetatakse malelauale mõõtmetega 8×8 ning veeretatakse nii, et igal malelaua ruudul viibib ta täpselt korra. Kas on võimalik, et igal hetkel langevad malelaua ruudu ja kuubiku all oleva tahu värvid kokku?

7. Positiivsete täisarvude kasvavas jadas on iga liige 2009. liikmest alates kõigi eelnevate liikmete summa jagaja. Tõesta, et alates mingist liikmest võrdub iga liige kõigi eelnevate liikmete summaga.

8. Olgu A, B, C, D neli erinevat punkti, mis paiknevad ühel sirgel selles järjekorras. Ringjooned diameetritega AC ja BD lõikuvad punktides X ja Y ning sirge XY lõikab sirget BC punktis Z. Olgu P punkt sirgel XY, mis erineb punktist Z, kusjuures sirge CP lõikab ringjoont diameetriga AC punktides C ja M ning sirge BP lõikab ringjoont diameetriga BD punktides B ja N. Tõesta, et sirged AM, DN ja XY lõikuvad ühes punktis.