Koduseid ülesandeid IMO-2009 võistkonnale: 1. komplekt

Tähtaeg: 23. mai 2009

1. Vaatleme hulka $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ ning kõiki tema neljaelemendilisi alamhulki. Milliseid neist alamhulkadest on rohkem: selliseid, mille elementide korrutis on suurem kui 2009, või selliseid, mille elementide korrutis on väiksem kui 2009?

2. Leia kõik sellised funktsioonid f täisarvude hulgast täisarvude hulka, et mistahes täisarvude m ja n korral kehtib võrdus
$$f(n|m|) + f(n(|m|+2)) = 2f(n(|m|+1)).$$

3. Olgu A, B, C, D ja E sellised järjestikused punktid ringjoonel keskpunktiga O, et kehtib $AC = BD = CE = DO$. Olgu H_1, H_2 ja H_3 vastavalt kolmnurkade ACD, BCD ja BCE kõrguste lõikepunktid. Tõesta, et kolmnurk $H_1H_2H_3$ on täisnurkne.

4. Positiivsed reaalarvud a, b, c rahuldavad tingimust $a^2+b^2+c^2 = 1$. Tõesta, et kehtib võrratus
$$\frac{a^2}{bc(a^2+b^2)} + \frac{b^2}{ca(b^2+c^2)} + \frac{c^2}{ab(c^2+a^2)} \geqslant \frac{9}{2}.$$

5. Ruudustikus $n \times n$ on algselt nähtavad ainult välised piirjooned ning seesmised jooned ühikruutude vahel puuduvad. Karl ja Kiur tõmbavad kordamööda piirlõigud ühikruutude vahel. Ühe käiguga tuleb tõmmata täpselt üks pikkusega 1 lõik, mis eraldab üksteisest kaks ühikruutu, mille vahel ei ole veel piirlõik tõmmatud. Mäng lõpeb siis, kui järjekordse käigu järel moodustavad kõik ruudustiku ruudud kaks eraldatud osa, st ühe osa mistahes ruudult lähtudes ei pääse malevanker teise osa ruudule ilma tõmmatud piirlõiku läbimata. Mängija, kelle käigu järel tekib selline olukord, kaotab. Kellel mängijatest leidub võitev strateegia, kui alustab Karl?

6. Vaatleme kõiki kasvavaid geomeetrilisi jadasid. Neist valime välja sellised, mis omavad maksimaalse arvu M ühiseid elemente hulgaga $\{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$. Leia M.

7. Kolmnurgas ABC on punktid M ja N vastavalt külgede BC ja AC keskpunktid. Kolmnurga sees valitakse punkt P nii, et $\angle BAP = \angle PCA = \angle MAC$. Tõesta, et $\angle PNA = \angle AMB$.

8. Tõesta, et leidub lõpmata palju naturaalarve n, mida saab esitada kujul $n = a^2 + b^2$ ning $n = c^3 + d^3$, kuid ei saa esitada kujul $n = x^6 + y^6$, kus a, b, c, d, x, y on positiivsed täisarvud.