Koduülesanded matemaatikast: 5. komplekt 2005/2006 õa

Ülesandeid polünoomidest (vanemale rühmale)

1. Kahe ruutpolünoomi $P(x)$ ja $Q(x)$ juured on negatiivsed täisarvud, kusjuures üks juur on neil ühine. Kas võib leiduda selline positiivne täisarv n, et $P(n) = 19$ ja $Q(n) = 98$?

2. Kas leidub selline täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, et $P(10) = 400$, $P(14) = 440$ ja $P(18) = 520$?

3. Polünoomil $x^4 - 2x^2 + ax + b$ on neli erinevat reaalarvulist juurt. Tõesta, et need juured on kõik absoluutväärtuselt väiksemad kui $\sqrt{3}$.

4. Kahe muutuja polünoom $P(x, y)$ rahuldab mistahes reaalarvude x ja y korral tingimust $P(x + y, y - x) = P(x, y)$. Tõesta, et see polünoom on konstantne, s.t. leidub selline reaalarv c, et $P(x, y) = c$ mistahes reaalarvude x ja y korral.

5. Olgu $P(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom ning olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ täisarvude jada, mis rahuldab järgmisi tingimusi: $a_1 = a_{2000} = 1999$ ja $a_{i+1} = P(a_i)$ iga $i \geqslant 1$ korral. Leia avaldise

   $$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{1999}}{a_{2000}}$$

   väärtus.

6. Täisarvuliste kordajatega polünoomi $P(x)$ jaoks leidub lõpmata palju selliseid täisarve, millest igaüks on polünoomi $P(x)$ väärtuseks vähemalt kahe erineva täisarvu x korral. Tõesta, et leidub ülimalt üks selline täisarv, mis on polünoomi $P(x)$ väärtuseks täpselt ühe täisarvu x korral.