Koduülesanded matemaatikast: 4. komplekt 2005/2006 õa

Ülesannete lahendused (vanem rühm)

1. Peokülalised istuvad ümmarguse laua ääres, kusjuures neid, kelle parempoolne naaber on samast soost, on sama palju kui neid, kelle parempoolne naaber on vastassoost. Tõesta, et lauasistujate arv jagub 4-ga.

   Lahendus. Olgu n nende lauasistujate arv, kelle parempoolne naaber on istuja endaga võrreldes vastassoost. Alustades suvalisest külalisest, teeme kellaosuti liikumisele vastassuunas täisringi ümber laua (st liigume iga lauasistuja juurest tema parempoolse naabri juurde); meie ees istuja sugu vahetub ringi jooksul parajasti n korda. Et ringi lõppedes jõuame sellesama külalise juurde, kellest alustasime, peab n olema paarisarv ning seega lauasistujate koguarv $N = 2n$ jaguma 4-ga.

2. Arvud $1, 2, \ldots, 49$ paigutatakse 7×7 tabelisse ning arvutatakse iga rea ja iga veeru summa. Mõned neist 14 summast on paaritud, mõned paaris. Tähistagu A kõigi paaritute summade ning B kõigi paarissummade summat. Kas võib juhtuda, et $A = B$?

   Vastus: ei. Kui see oleks võimalik, siis kehtiks $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 49) = = A + B = 2B$. Arv B on paarisarv, sest ta on paarisarvude summa, samas $1 + 2 + \ldots + 49 = 25 \cdot 49$ on paaritu arv; vastuolu.

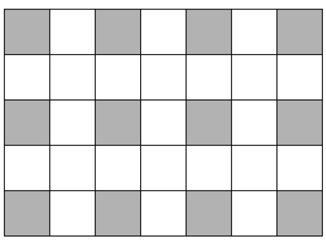
3. Ristkülikukujuline ruudustiku ruudud värvitakse malelaua moodi mustaks ja valgeks ning igasse ruutu kirjutatakse üks täisarv. On teada, et iga rea arvude summa on paaris ja iga veeru arvude summa on paaris. Tõesta, et kõigi mustades ruutudes asuvate arvude summa on samuti paaris.

   Lahendus. Eeldame, et ülemine vasakpoolne ruut on valge (kui see ruut on must, siis piisab tõestada, et kõigi valgetesse ruutudesse kirjutatud arvude summa on paarisarv, sest kõigi ruudustiku arvude summa on paaris). Liites kokku ülaäärest alates esimese, kolmanda jne rea ning vasakust äärest alates esimese, kolmanda jne veeru arvude summad, saame tulemuseks ruudustiku mustades ruutudes asuvate arvude summa, millele on liidetud mõnede valgetes ruutudes asuvate arvude summa kahekordne. Et saadud summa on paarisarv, siis on ka ainuüksi mustades ruutudes ruutudes asuvate arvude summa paaris.

4. Kas ruudustiku mõõtmetega 5×7 saab täpselt katta kolmest ühikruudust koostatud nurgikutega mitmes kihis nii, et iga ruutu katab sama arv nurgikuid?

   Vastus: ei. Oletame, et leidub katmine, mille puhul iga ruutu katab parajasti k nurgikut. Värvime ruudustiku ruudud nii, nagu kujutatatud joonisel. Iga värvitud ruutu katab täpselt k kihti, seega tuleb ruudustiku katmisel kasutada vähemalt $12k$ nurgikut. Need aga katavad ühtekokku $3 \cdot 12k > 35k$ ruutu.

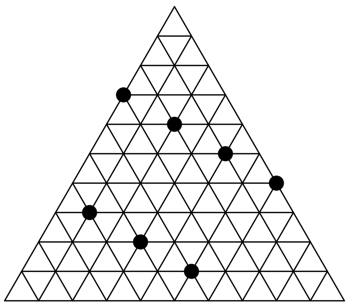
   Teine lahendus. Kirjutame igasse värvitud ruutu arvu -2 ja igasse värvimata ruutu arvu 1. Ühe nurgiku kaetud ruutudes olevate arvude summa on siis alati mittenegatiivne ja järelikult on ka kõigi nurgikute poolt kaetud arvude kogusumma mittenegatiivne. Olgu S see summa ja s ruudustiku ruutudes olevate arvude summa. Siis $S = ks = k(-2 \cdot 12 + 1 \cdot 23) = -k < 0$, vastuolu.

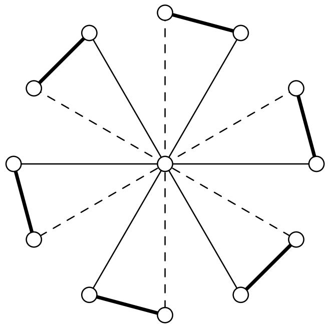


Märkus. Analoogiliselt saab tõestada, et soovitud viisil katmist ei leidus, kui ruudustiku mõõtmed on $3\times(2n+1)$ või 5×5. Ruudustiku mõõtmetega 2×3 saab katta ühes kihis kahe nurgikuga, ruudustiku mõõtmetega 5×3 ühes kihis 15 nurgikuga ja ruudustiku mõõtmetega 2×2 kolmes kihis nelja nurgikuga. Neid katmisviise kombineerides pole raske tõestada, et kõiki ülejäänud $m\times n$ ruudustikke ($m,\ n\geqslant 2$) on võimalik katta.

5. Võrdkülgne kolmnurk ABC on jaotatud 100 kongruentseks võrdkülgseks kolmnurgaks. Milline on suurim võimalik nuppude arv, mida saab asetada väikeste kolmnurkade tippudesse nii, et ükski kaks nuppu ei asuks kolmnurga ABC mõne küljega paralleelsel sirgel?

   Vastus: 7. Näide 7 nupu jaoks on alumisel joonisel vasakul. Oletame, et meil on õnnestunud ülesande tingimuste kohaselt ära paigutada 8 nuppu. Olgu iga väikese kolmnurga kõrgus 1 ning tähistagu a_i, b_i ja c_i vastavalt i-nda nupu kaugust kolmnurga külgedest. Iga $i=1$, 2, $\ldots$, 8 korral siis $a_i,\ b_i,\ c_i\geqslant 0$ ja $a_i+b_i+c_i=10$. Seega $(a_1+a_2+\ldots+a_8)+$ $+(b_1+b_2+\ldots+b_8)+(c_1+c_2+\ldots+c_8)=80$. Teiselt poolt ei saa ükski sulgudes olev summa olla väiksem kui $0+1+\ldots+7=28$, ent $3\cdot 28=84>80$, vastuolu.





6. Kuningriigis on 13 linna. Mõnede linnapaaride vahele soovitakse rajada kahesuunalised vahepeatusteta bussi-, rongi- ja/või lennuliinid. Milline on vähim võimalik liinide koguarv, et valides mis tahes kaks transpordiliiki, pääseb nende abil igast linnast igasse teise linna, ilma kolmandat transpordiliiki kasutamata?

   Vastus: 18. Näide 18 liini jaoks on ülaltoodud joonisel paremal; kolme erinevat liiki jooned tähistavad kolme transpordiliiki. Teiselt poolt saab 13 tipuga graaf saab olla sidus vaid siis, kui tal on vähemalt 12 serva, st iga kahe transpordiliigi peale kokku peab liine olema vähemalt 12. Seega kõigi liinide arvu kahekordne on vähemalt $12+12+12=36$.

7. Keeleteadlaste konverentsil oli $n\geqslant 3$ osavõtjat, kes valdasid ühtekokku 14 erinevat keelt. On teada, et suvalise kolme teadlase puhul leidus keel, mida kõik kolm valdasid, kuid ei leidunud keelt, mida oleks osanud üle poole osavõtjatest. Leia arvu n vähim võimalik väärtus.

   Vastus: 8. Et mis tahes keelt võib osata ülimalt $\dfrac{n}{2}$ teadlast, siis saab see keel olla ühiseks keeleks ülimalt

$$\binom{[n/2]}{3}=\frac{\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right]-2\right)}{6}\leqslant\frac{n(n-2)(n-4)}{48}$$

teadlaste kolmikule. Üldse saab n teadlasest moodustada

$$\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

kolmikut. Räägitavaid keeli on 14, järelikult peab kehtima võrratus

$$14\cdot\frac{n(n-2)(n-4)}{48}\geqslant\frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

millest pärast lihtsustamist leiame $n\geqslant 8$.

Sobiv näide $n=8$ puhul on järgmine (osavõtjad tähistame numbritega 1, 2, $\ldots$, 8 ning keeled tähtedega A, B, $\ldots$, N):

1:	A, C, E, G, I, K, M	5:	B, C, F, G, J, K, N
2:	A, C, E, H, J, L, N	6:	B, C, F, H, I, L, M
3:	A, D, F, G, I, L, N	7:	B, D, E, G, J, L, M
4:	A, D, F, H, J, K, M	8:	B, D, E, H, I, K, N

Teine lahendus. Kui $n \leqslant 5$, siis suvaliselt valitud kolme osavõtja ühist keelt oskab vähemalt 3 ehk üle poole kõigist osavõtjatest, mis on vastuolus ülesande tingimustega. Kui $n = 6$ või $n = 7$, siis valime kõigi teadlaste seast välja suvalised 6. Neist saab moodustada 20 erinevat kolmikut. Dirichlet' printsiibi põhjal leidub keel, mis on ühiseks keeleks kahele erinevale kolmikule. Kuid kahes erinevas kolmikus on esindatud vähemalt 4 teadlast. Seega leidub keel, mida oskab vähemalt 4 osavõtjat — jällegi vastuolu ülesande tingimustega. Kui aga $n = 8$, saame ülesande tingimustele vastava konstruktsiooni leida.

Märkus. Juhu $n = 8$ jaoks näite konstrueerimisel võime lähtuda järgmistest tingimustest, mida see konstruktsioon peab rahuldama (miks?): a) iga keelt räägib täpselt 4 teadlast; b) iga teadlane räägib täpselt 7 keelt; c) mistahes kolme teadlase puhul leidub üks ja ainult üks keel, mida kõik need kolm teadlast räägivad.

8. Kaheksa lauljat osaleb muusikafestivalil, kus kantakse ette n laulu. Iga laulu esitab 4 lauljat ja iga kaks lauljat esinevad koos samas arvus lauludes. Leia vähim laulude arv n, mille korral see on võimalik.

Vastus: 14. Olgu m laulude arv, mida iga kaks lauljat koos esitavad. Loendame hulka $A = \{(l, i, j)\colon \text{laulus } l \text{ esinevad koos lauljad } i \text{ ja } j\}$ kahel viisil: laulude järgi ja esitajate paaride järgi. Saame võrduse

$$n\binom{4}{2} = m\binom{8}{2}$$

ehk $n = 14m/3$. Et n on täisarv, siis peab olema $m \geqslant 3$ ja seega $n \geqslant 14$. Teiselt poolt, $n = 14$ on tõesti võimalik, nagu nähtub järgmisest tabelist (iga hulk näitab ühte laulu esitavate lauljate järjekorranumbereid):

$\{1,2,3,4\}$	$\{5,6,7,8\}$	$\{1,2,5,6\}$	$\{3,4,7,8\}$	$\{3,4,5,6\}$
$\{1,3,5,7\}$	$\{2,4,6,8\}$	$\{1,3,6,8\}$	$\{2,4,5,7\}$	$\{1,4,5,8\}$
$\{2,3,6,7\}$	$\{1,4,6,7\}$	$\{1,2,7,8\}$	$\{2,3,5,8\}$.	

9. Parlamendis on 100 saadikut, kes moodustavad 30 komisjoni, igaühes 20 liiget. Tõesta, et leidub kaks komisjoni, millel on vähemalt neli ühist liiget.

Lahendus. Olgu meil N komisjoni, millest ühelgi kahel pole rohkem kui kolm ühist liiget. Iga saadiku korral kirjutame välja kõik komisjonide järjestamata paarid, kuhu see saadik kuulub. Kui saadik kuulub K komisjoni, siis tema puhul saame $K(K-1)/2$ paari. Kuulugu esimene saadik K_1 komisjoni, teine K_2 komisjoni jne kuni 100-s saadik K_{100} komisjoni. Väljakirjutatud paaride koguarv on

$$\begin{aligned}
&\frac{K_1(K_1-1)}{2} + \ldots + \frac{K_{100}(K_{100}-1)}{2} = \\
&= \frac{K_1^2 + \ldots + K_{100}^2}{2} - \frac{K_1 + \ldots + K_{100}}{2} \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{(K_1 + \ldots + K_{100})^2}{100} - (K_1 + \ldots + K_{100})\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(20N)^2}{100} - 20N\right) = \frac{1}{2}N(4N-20),
\end{aligned}$$

sest $K_1 + \ldots + K_{100} = 20N$. Et eelduse kohaselt ei kuulu ühtegi komisjonipaari üle kolme ühise liikme, siis ei saa väljakirjutatud paaride arv olla suurem kui $3N(N-1)/2$. Järelikult $3N(N-1)/2 \geqslant N(4N-20)/2$ ehk $N \leqslant 17$. Juhul $N = 30$ ei saa meie esialgne eeldus seega kehtida.

10. Antud on ruudustik mõõtmetega $m \times n$. Mitmel viisil saab kolme värviga värvida ruudustiku ühiklõigud nii, et igal ühikruudul oleks kaks serva ühte värvi ja kaks serva teist värvi?

Vastus: $3^{m+n} 2^{mn}$. Olgu A, B ja C need kolm värvi. Olgu a_n võimaluste arv värvida horisontaalse $1 \times n$ riba servad kolme värviga, kui ruutude ülemiste servade värvid on teada. Kui $n = 1$, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et ülemine serv on värvi A. Sel juhul on kolm võimalust valida teine A-värvi serv ja edasi kaks võimalust valida ülejäänud servade värv. Järelikult $a_1 = 6$.

Leiame nüüd a_n abil arvu a_{n+1}. Olgu antud $1 \times n$ riba suvaline värvimine, üldisust kitsendamata eeldame, et kõige parempoolsema serva värv on A. Lisame ribale paremale juurde ühikruudu, mille ülemise serva värv on teada. Kui uue ruudu ülemine serv on värvi A, siis on kaks võimalust valida ruudu ülejäänud servade värv, vastasel korral on aga kaks võimalust valida, milline ülejäänud servades värvida värvi A. Seega $a_{n+1} = 2a_n$, mille abil leiame $a_n = 3 \cdot 2^n$.

Esialgses ülesandes on 3^n võimalust värvida ülemise rea ruutude ülemised servad ning $3 \cdot 2^n$ võimalust värvida iga järgnev rida, kokku seega $3^n \cdot (3 \cdot 2^n)^m = 3^{m+n} 2^{mn}$ võimalust.