

# Koduülesanded matemaatikast: 4. komplekt 2005/2006 õa

## Ülesandeid kombinatoorikast (vanemale rühmale)

Tähtaeg: 15. märts 2006

1. Peokülalised istuvad ümmarguse laua ääres, kusjuures neid, kelle parempoolne naaber on samast soost, on sama palju kui neid, kelle parempoolne naaber on vastassoost. Tõesta, et lauasistujate arv jagub 4-ga.
2. Arvud  $1, 2, \dots, 49$  paigutatakse  $7 \times 7$  tabelisse ning arvutatakse iga rea ja iga veeru summa. Mõned neist 14 summast on paaritud, mõned paaris. Tähistagu  $A$  kõigi paaritute summade ning  $B$  kõigi paarissummade summat. Kas võib juhtuda, et  $A = B$ ?
3. Ristkülikukujuline ruudustiku ruudud värvitakse malelaua moodi mustaks ja valgeks ning igasse ruutu kirjutatakse üks täisarv. On teada, et iga rea arvude summa on paaris ja iga veeru arvude summa on paaris. Tõesta, et kõigi mustades ruutudes asuvate arvude summa on samuti paaris.
4. Kas ruudustiku mõõtmetega  $5 \times 7$  saab täpselt katta kolmest ühikruudust koostatud nurgikutega mitmes kihis nii, et iga ruutu katab sama arv nurgikuid?
5. Võrdkülgne kolmnurk  $ABC$  on jaotatud 100 kongruentseks võrdkülgseks kolmnurgaks. Milline on suurim võimalik nuppude arv, mida saab asetada väikeste kolmnurkade tip-pudesse nii, et ükski kaks nappu ei asuks kolmnurga  $ABC$  mõne küljega paralleelsel sirgel?
6. Kuningriigis on 13 linna. Mõnede linnapaaride vahele soovitakse rajada kahesuunalised vahepeatusteta bussi-, rongi- ja/või lennuliinid. Milline on vähim võimalik liinide ko-guarv, et valides mis tahes kaks transpordiliiki, pääseb nende abil igast linnast igasse teise linna, ilma kolmandat transpordiliiki kasutamata?
7. Keeleteadlaste konverentsil oli  $n \geq 3$  osavõtjat, kes valdasid ühtekokku 14 erinevat keelt. On teada, et suvalise kolme teadlase puhul leidis keel, mida kõik kolm valdasid, kuid ei leidunud keelt, mida oleks osanud üle poole osavõtjatest. Leia arvu  $n$  vähim võimalik väärtus.
8. Kaheksa lauljat osaleb muusikafestivalil, kus kantakse ette  $n$  laulu. Iga laulu esitab 4 lauljat ja iga kaks lauljat esinevad koos samas arvus lauludes. Leia vähim laulude arv  $n$ , mille korral see on võimalik.
9. Parlamendis on 100 saadikut, kes moodustavad 30 komisjoni, igaühes 20 liiget. Tõesta, et leidub kaks komisjoni, millel on vähemalt neli ühist liiget.
10. Antud on ruudustik mõõtmetega  $m \times n$ . Mitmel viisil saab kolme värviga värvida ruu-dustiku ühiklõigud nii, et igaal ühikruudul oleks kaks serva ühte värvi ja kaks serva teist värvi?