Ühikmurrud ja egiptilised esitused

Ühikmurruks nimetatakse mingi positiivse täisarvu pöördväärtust. Ühikmurrud on niisiis arvud $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ jne.

Vana-Egiptuse matemaatikas esitati kõiki murdarve paarikaupa erinevate ühikmurdude summana. Tänapäeval pole see levinud, kuid eksisteerib siiski arvuteooria haru, mis uurib taoliste esituste võimalusi ja omadusi. Erinevates käsitlustes kas lubatakse arvul 1 esituses korduda või tuuakse arvu täisosa eraldi välja.

Nimetame ratsionaalarvu esitust paarikaupa erinevate ühikmurdude summana näiteks *egiptiliseks esituseks* (ingl *Egyptian fraction*). Loeme arvu egiptilised esitused võrdseks parajasti juhul, kui liidetavate järjestamisel saame sama formaalse summa.

Näiteks kõik ühikmurrud ise esituvad egiptiliselt ühe liidetavaga summana, kus liidetavaks on see ühikmurd ise. Arv $\frac{2}{3}$ egiptiliseks esituseks on $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, kuid mitte $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, sest liidetavad peavad olema paarikaupa erinevad. Arv 0 esitub egiptiliselt tühja summaga, see on ka arvu 0 ainus egiptiline esitus.

1 Leia arvu $\frac{7}{118}$ mõni egiptiline esitus.

2 Kas samal arvul võib leiduda mitu egiptilist esitust?

Mittenegatiivse ratsionaalarvu egiptilise esituse tuletamiseks on palju erinevaid algoritme. Vaatleme siin kaht kõige loomulikumana pähe tulevat. Tõestame kummagi kohta samad kaks fakti, ülejäänud seonduvad olulised asjaolud on formuleeritud ülesannetena.

Maksegiptiline esitus. Kõige loomulikum lähenemine on arvu $r > 0$ egiptiliseks esitamiseks leida suurim ühikmurd u, mis rahuldab tingimust $u \leqslant r$, ja võtta summasse u koos jääkosa $r - u$ esitamisel sama algoritmi järgi saadavate murdudega. Juhul $r = 0$ anname lihtsalt tühja summa välja.

Teoreem 1. *Kirjeldatud algoritmi arvutatava summa väärtus võrdub algse ratsionaalarvuga.*

TÕESTUS. Näitame induktsiooniga k järgi, et kui algoritm annab ratsionaalarvul $r \geqslant 0$ välja k liidetavaga summa, siis selle summa väärtus on r.

Kui $k = 0$, siis peab olema $r = 0$, sest juhul $r > 0$ leiab algoritm vähemalt ühe liidetava. Seega väide kehtib, sest 0 liidetava summa väärtus on 0.

Eeldame nüüd, et väide kehtib k korral, ja andku algoritm välja summa $u_1 + \ldots + u_{k+1}$. Siis $r > 0$, muidu poleks positiivse arvu liidetavaga summa saamine võimalik. Järelikult summa $u_2 + \ldots + u_{k+1}$ on algoritmi tulemus arvul $r - u_1$. Induktsiooni eeldusest tulenevalt $u_2 + \ldots + u_{k+1} = r - u_1$. Järelikult $u_1 + \ldots + u_{k+1} = r$. □

Teoreem 2. *Kirjeldatud algoritmi arvutatava summa liidetavatest saab korduda vaid ühikmurd* 1.

TÕESTUS. Olgu ratsionaalarvu $r > 0$ jaoks esimesena valitud ühikmurd $\frac{1}{n}$, kusjuures $\frac{1}{n} < 1$, ja teisena valitud ühikmurd $\frac{1}{m}$. Siis $n > 1$ ja $r - \frac{1}{n} > 0$. Seega $r < \frac{1}{n-1} \leqslant \frac{1}{\frac{n}{2}} = \frac{2}{n}$, mis annab $\frac{1}{n} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} > r - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{m}$. Kuna ülejäänud liidetavad moodustavad jääkosa esituse sama algoritmi järgi, siis tulemussumma liidetavad arvutatakse rangelt kahanevas järjekorras, kordused on välistatud. Sama kehtib ka juhul, kui r jaoks esimesena valitud ühikmurd on 1, aga tagapool ilmuvad ka väiksemad ühikmurrud. □

Vastavalt esituse saamisviisile — järjest valida suurim võimalik ühikmurd — nimetame selliselt saadavat esitust *maksegiptiliseks esituseks.*

3. Tõesta, et iga ratsionaalarv $r \geqslant 0$ on maksegiptiliselt esituv, kusjuures liidetavate arv esituses pole suurem kui lugeja r esituses taandumatu murruna.

4. Kirjuta programm, mis iga ratsionaalarvu $r \geqslant 0$ jaoks leiab tema maksegiptilise esituse.

Järeldusena saame, et igal ratsionaalarvul leidub parajasti üks maksegiptiline esitus, sest esitust spetsifitseerivas algoritmis pole valikuvabadust, mitut lõppvastust ta välja anda ei saa.

Lahutusegiptiline esitus. Teine üsna loomulik viis ratsionaalarvu $r \geqslant 0$ egiptilise esituse arvutamiseks on järgmine. Leiame esituse taandumatu murruna $r = \frac{n}{m}$. Teisendame summat $\underbrace{\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{n}$ järgnevalt kirjeldatavate sammudega järk-järgult niikaua, kuni oleme jõudnud olukorrani, kus kordub ainult liidetav 1, siis lõpetame. Kui summas esineb veel 1-st väiksemate liidetavate kordumisi, siis valime meelevaldselt kaks võrdset liidetavat $\frac{1}{k}$. Kui $k = 2i$, $i \in \mathbb{Z}^+$, siis asendame need kaks liidetavat ühe liidetavaga $\frac{1}{i}$.

Kui $k=2i+1$, $i \in \mathbb{Z}^+$, siis asendame need kaks liidetavat liidetavatega $\frac{1}{i+1}$ ja $\frac{1}{(i+1)k}$.

Teoreem 3. *Kirjeldatud algoritmi arvutatava summa väärtus võrdub algse ratsionaalarvuga.*

TÕESTUS. Olgu $r \geqslant 0$ ja $r=\frac{n}{m}$ tema esitus taandumatu murruna. Algne summa $\underbrace{\frac{1}{m}+\ldots+\frac{1}{m}}_{n}$ võrdub väärtuselt r-ga. Kahe liidetava $\frac{1}{2i}$ asendamine ühe liidetavaga $\frac{1}{i}$ summa väärtust ei muuda, sest $\frac{1}{i}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{2i}+\frac{1}{2i}$. Ka kahe liidetava $\frac{1}{2i+1}$ asendamine liidetavatega $\frac{1}{i+1}$ ja $\frac{1}{(i+1)k}$ ei muuda summa väärtust, sest $\frac{1}{i+1}+\frac{1}{(i+1)k}=\frac{k+1}{(i+1)k}=\frac{2i+1+1}{(i+1)k}=\frac{i+1+i+1}{(i+1)k}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}$. Seega teisendused säilitavad summa väärtuse, ka lõppsumma peab võrduma algse summa väärtusega ehk arvuga r. $\square$

Teoreem 4. *Kirjeldatud algoritmi arvutatava summa liidetavatest saab korduda vaid ühikmurd* 1.

TÕESTUS. Vastavalt algoritmi kirjeldusele saab ta töö lõpetada vaid sellise summa leidmise puhul. $\square$

Põhisammuks selles arvutuses on ühesuguste liikmete lahutamine kaheks erinevaks. Sellest tulenevalt nimetame nii saadavat esitust *lahutusegiptiliseks esituseks*.

5. Tõesta, et iga ratsionaalarv $r \geqslant 0$ on lahutusegiptiliselt esituv, kusjuures liidetavate arv esituses pole suurem kui lugeja r esituses taandumatu murruna.

6. Tõesta, et arvu lahutusegiptiline esitus on ühene, st ei sõltu algoritmi töö käigus tehtavatest valikutest.

7. Kirjuta programm, mis iga ratsionaalarvu $r \geqslant 0$ jaoks leiab tema lahutusegiptilise esituse.

Lisaülesandeid.

8 Kas iga ratsionaalarvu $r \in [0;1]$ maksegiptiline esitus on minimaalse liidetavate arvuga r esitus ühikmurdude summana?

9 Kas iga ratsionaalarvu $r \in [0;1]$ lahutusegiptiline esitus on minimaalse liidetavate arvuga r esitus ühikmurdude summana?

10 Kas iga ratsionaalarvu $r \in [0;1]$ maksegiptiline ja lahutusegiptiline esitus on võrdsed?

11 Kas iga ratsionaalarvu $r \in [0;1]$ maksegiptiline esitus sisaldab ülimalt samapalju liidetavaid kui lahutusegiptiline esitus?

12 Kas iga ratsionaalarvu $r \in [0;1]$ lahutusegiptiline esitus sisaldab ülimalt samapalju liidetavaid kui maksegiptiline esitus?

13 Kas iga ratsionaalarvu $r \geqslant 0$ maksegiptilises ja lahutusegiptilises esituses esineb ühikmurd 1 ühepalju kordi?

14 Kas iga ratsionaalarv $r \geqslant 0$ esitub paarikaupa erinevate ühikmurdude summana?

15 Kas iga ratsionaalarv $r \geqslant 0$ esitub paarikaupa ühistegurita naturaalarvude pöördarvude summana?

Raskemad ülesanded

16 Iga positiivse naturaalarvu n jaoks olgu

$$e(n) = \frac{\varphi(n)}{n},$$

kus φ on Euleri funktsioon. Tõestada, et iga $n < 9699690$ korral $e(n) > e(9699690)$. (1996 „Balti Teele“ pakutud ülesannetest)

17 Olgu p algarv ja $b > 1$ temaga mitte jaguv täisarv. Tõesta, et p pöördarvu periood positsioonilises esituses alusel b on arvu $p-1$ jagaja.

18 Olgu antud suvaline naturaalarv $b > 1$ ja algarv $p \nmid a$. Arvu $\frac{1}{p}$ esituses alusel b jagatakse esimene periood meelevaldselt võrdse pikkusega osadeks. Iga osa korral leitakse ratsionaalarv, mille b-ndesituse komajärsete numbrite jada on parajasti arvu $\frac{1}{p}$ b-ndesituse numbrite jada alates valitud osa esimesest numbrist. Tõesta, et saadud ratsionaalarvude summa on täisarv.

Kodune töö. Harjutusülesannete norm hõlmab kõik selles jaotises toodud ülesanded, sealhulgas ka siintoodud ülesanded 16-18, mis on võetud sessioonil jagatud ratsionaalarvude materjalist. Loomulikult on soovitav lahendada iseseisvalt ka kõik teised sessil jagatud materjalis toodud ülesanded ning otsida veebist juurdegi.

Tundmatutest mõistetest, nagu näiteks Euleri φ-funktsioon, leiab teavet veebist. Ka egiptiliste murdude kohta on veebis infot, kuid siin toodud ülesanded võiksite olla suutelised ilma abita ära lahendama.