Koduülesanded matemaatikast: 1. komplekt 2005/2006 õa

Ülesandeid võrratustest (vanemale rühmale)

Tähtaeg: 20. detsember 2005

1. Olgu n mittenegatiivne täisarv. Tõesta, et

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

2. Olgu a, b, c positiivsed reaalarvud. Tõesta, et kui $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$, siis $abc \leqslant 1$.

3. Võrrandi $x^6 - 6x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1 = 0$ kõik juured on positiivsed. Tõesta, et

$$a^2 + b = (b-d)^2 + c + d.$$

4. Farmeril on materjali 1000 meetri pikkuse aia ehitamiseks. Ta tahab ära piirata ristkülikukujulise ala ning poolitada see keskelt aiaga kaheks võrdse suurusega tükiks. Millise ala peaks farmer ära piirama, et karjamaa pindala oleks suurim võimalik.

   NB! Tuletist mitte kasutada.

5. Olgu a, b, c positiivsed reaalarvud. Tõesta, et

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

   Vihje: Võrdle pooli avaldisega $3\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} - 1$.

6. Olgu x, y, z positiivsed reaalarvud. Tõesta, et

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geqslant \frac{9}{x+y+z}.$$

7. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellised positiivsed reaalarvud, et

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 3 \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^5 = 5.$$

   Tõesta, et

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \frac{3}{2}.$$

8. Olgu a, b, c kolmnurga küljepikkused. Tõesta, et

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leqslant 2.$$

9. Olgu a, b, c positiivsed reaalarvud. Tõesta, et

$$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leqslant \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

10. Olgu $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Lahendada võrrand

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}.$$