Koduülesanded matemaatikast: 5. komplekt 2005/2006 õa

Ülesandeid arvuteooriast (nooremale rühmale)

1. Leia summa

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2004\cdot 2005\cdot 2006}.$$

Lahendus. Teisendame:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right),$$

mille abil

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2004\cdot 2005\cdot 2006}=\\ &\quad=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2004}-\frac{2}{2005}+\frac{1}{2006}\right)=\\ &\quad=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}\right)=\\ &\quad=\frac{1005507}{2005\cdot 2006}.\end{aligned}$$

2. Polünoomi x^3+px^2+qx+r nullkohad on x_1,x_2,x_3, kus $p,q,r\in\mathbb{R}$ on etteantud arvud. Leia polünoom, mille nullkohad on x_1^2,x_2^2,x_3^2.

Lahendus. Viète'i valemite abil

$$\begin{aligned}&p=-(x_1+x_2+x_3);\\ &q=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3;\\ &r=-x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

Saadud võrdusi teisendades saame

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3=-p;\\ &x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q;\\ &x_1x_2x_3=-r.\end{aligned}$$

Pidades silmas Viète'i valemeid, peavad uue võrrandi kordajad olema (muutuja x astmenäitaja kahanevas järjekorras)

$$\begin{aligned}&-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=-[(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)]=-(p^2-2q)=2q-p^2;\\ &x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=q^2-2pr;\\ &-x_1^2x_2^2x_3^2=-(x_1x_2x_3)^2=-r^2\end{aligned}$$

Seega on nõutud võrrand kujul

$$x^3+(2q-p^2)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0.$$

3. (a) Kas leidub täisarvuliste kordajatega polünoom P nii, et $P(2) = 0$ ja $P(0) = 4$?
(b) Kas leidub täisarvuliste kordajatega polünoom P nii, et $P(1) = 7$ ja $P(8) = 9$?
(c) Milliste täisarvude n korral leidub täisarvuliste kordajatega polünoom P, et $P(1) = 7$ ja $P(8) = n$?

Lahendus. (a)-osas sobib nõutavaks polünoomiks näiteks $P(x) = -2x + 4$.

Pidades silmas jaguvust $m - n \mid P(m) - P(n)$, kus m ja n on suvalised täisarvud, saame, et (b)-osas $8 - 1 \mid P(8) - P(1)$ ehk $7 \mid 2$, mis ei kehti. Seega nõutavat polünoomi ei eksisteeri.

(c)-osas saame, et $8 - 1 \mid P(8) - P(1)$ ehk $7 \mid n - 7$, millest järeldub, et $n = 7k$, kus $k \in \mathbb{Z}$. Teiselt poolt, suvalise täisarvu $n = 7k$ korral, kus k on mistahes täisarv, võime võtta $P(x) = (k-1)(x-1) + 7$, misjuhul $P(1) = 7$ ja $P(8) = 7k = n$, nagu soovitud.

4. Skitseeri koordinaattasandil kõik punktid (x, y), mis rahuldavad võrdust

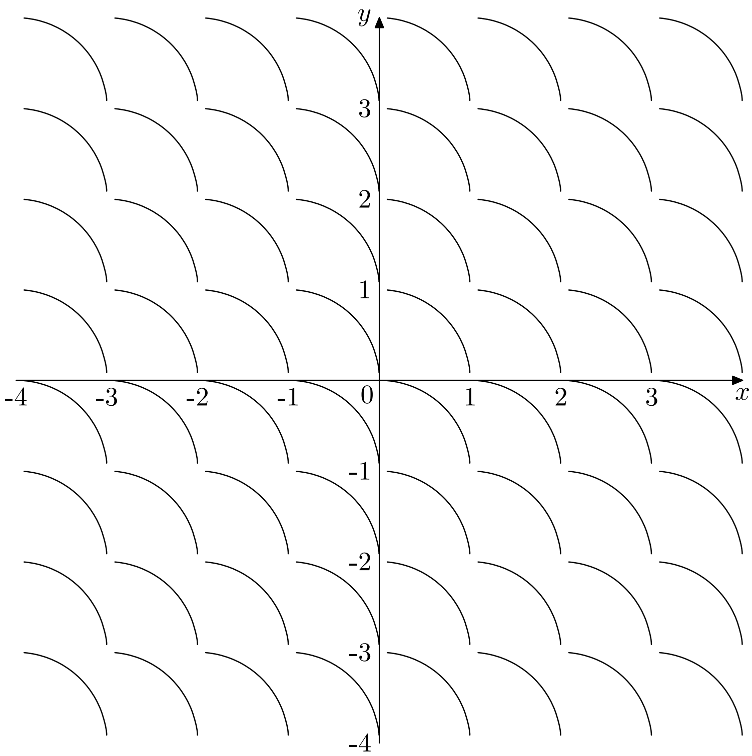
$$\{x\} + \{y\} = 1$$

(siin $\{r\} = r - [r]$, kusjuures $[r]$ on suurim täisarv, mis ei ületa arvu r).

Lahendus. Vaatleme kõigepealt juhtu $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$. Siis $\{x\} = x$, $\{y\} = y$ ning esialgne võrrand saab kuju $x^2 + y^2 = 1$. Seda võrrandit rahuldavad parajasti kõik ühikringjoone punktid, kusjuures antud tingimuste tõttu vaatleme punkte esimeses veerandis ja peame jätma ka punktid $(1, 0)$ ning $(0, 1)$ välja.

Suvaliste x ja y korral piisab märgata, et (x, y) rahuldab antud võrdust parajasti siis, kui $(\{x\}, \{y\})$ rahuldab antud võrdust. Niisiis rahuldavad antud võrdust parajasti lisaks veel punktid, mis on saadavad eelmises lõigus toodud ühikringjoone punktidest täisarvuliste koordinaatidega vektori abil nihutamise teel.

Ülaltoodud arutelu põhjal kujutame võrdust $\{x\} + \{y\} = 1$ rahuldavad punktid (x, y) koordinaatteljestikus:



5. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{2006} = 2006 \\ x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2006}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2006}^3 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

Lahendus. Süsteemi teisendame kujule

$$\begin{cases} (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_{2006} - 1) = 0 \\ x_1^3(x_1 - 1) + x_2^3(x_2 - 1) + \cdots + x_{2006}^3(x_{2006} - 1) = 0 \end{cases}.$$

Lahutades teisest võrrandist esimese, saame pärast tegurdamist

$$x_n^3(x_n - 1) - (x_n - 1) = (x_n - 1)^2(x_n^2 + x_n + 1), \quad n = 1, 2, \ldots, 2006,$$

et

$$(x_1 - 1)^2(x_1^2 + x_1 + 1) + (x_2 - 1)^2(x_2^2 + x_2 + 1) + \cdots + (x_{2006} - 1)^2(x_{2006}^2 + x_{2006} + 1) = 0.$$

Pidades silmas, et

$$x_n^2 + x_n + 1 = \frac{1}{2} \cdot (x_n^2 + (x_n + 1)^2 + 1) > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, 2006,$$

kehtib $(x_n - 1)^2(x_n^2 + x_n + 1) \geqslant 0$ iga $n = 1, 2, \ldots, 2006$ korral. Seega saame ainsa võimalusena $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2006} = 1$.

6. Olgu r, s ja t võrrandi $x(x-2)(3x-7) = 2$ lahendid.
(a) Tõesta, et r, s ja t on positiivsed reaalarvud.
(b) Leia $\arctan r + \arctan s + \arctan t$.

Lahendus. (a) Kirjutades

$$f(x) = x(x-2)(3x-7) = 3x^3 - 13x^2 + 14x - 2,$$

paneme tähele, et $f(0) = -2$ ja $f(1) = 2$, mistõttu antud võrrandi üks lahend (ehk funktsiooni f nullkoht) paikneb arvude 0 ja 1 vahel. Analoogiliselt, $f(2) = -2$ tõttu on teine lahend arvude 1 ja 2 vahel, ning $f(3) = 4$ tõttu on kolmas lahend arvude 2 ja 3 vahel.

(b) Üldistame nurkade summa tangensi valemit:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \frac{\tan\alpha + \tan(\beta + \gamma)}{1 - \tan\alpha \tan(\beta + \gamma)} = \frac{\tan\alpha + \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma}}{1 - \tan\alpha \cdot \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma}} \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1 - (\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha)}. \end{aligned}$$

Valides nüüd $\alpha = \arctan r$, $\beta = \arctan s$ ja $\gamma = \arctan t$, saame

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{r + s + t - rst}{1 - (rs + st + tr)}.$$

Viète'i valemite kohaselt saame aga avaldada $f(x) = 3x^3 - 13x^2 + 14x - 2$ nullkohtade r, s ja t kohta võrdused $r + s + t = \frac{13}{3}$, $rs + st + tr = \frac{14}{3}$ ning $rst = \frac{2}{3}$. Niisiis

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\frac{13}{3} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{14}{3}} = -1$$

ja

$$\alpha + \beta + \gamma = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Kuna $r,s,t>0$, siis $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$. Seega

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

7. Jada (a_n) on määratud järgmiste tingimustega:
$a_0=1$, $a_1=2$, $n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}$ kõigi $n\geqslant 1$ korral. Leia summa

$$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{2005}}{a_{2006}}.$$

Lahendus. Võttes $n=1,2,\ldots$, saame $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{6}$, $a_4=\frac{1}{24}$ jne. Tekib hüpotees, et $a_n=\frac{1}{n!}$. Oletame, et väide $a_n=\frac{1}{n!}$ on õige kõigi $n\leqslant k$ korral, siis juhul $n=k+1$ saame

$$n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)\cdot\frac{1}{n!}-(n-2)\cdot\frac{1}{(n-1)!},$$

mille abil

$$a_{n+1}=\frac{n-1}{(n+1)!}-\frac{n-2}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal kehtib $a_n=\frac{1}{n!}$ kõigi naturaalarvude n jaoks.

Nüüd aga

$$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{2005}}{a_{2006}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\frac{1}{2}}+3+\cdots+2006=\frac{3}{2}+\frac{2006\cdot 2007}{2}.$$

8. Reaalarvude a,b,c,d jaoks kehtivad järgmised võrdused:

$$\begin{cases} a+b=12\\ ax+by=115\\ ax^2+by^2=187\\ ax^3+by^3=877\end{cases}.$$

Leia avaldise ax^4+bx^4 väärtus.

Lahendus. Me saame

$$(ax^3+bx^3)(x+y)=(ax^4+by^4)+(ax^2+by^2)xy,$$

ehk teisisõnu,

$$ax^4+by^4=187xy-877(x+y).$$

Seega piisab määrata suurused $x+y$ ja xy. Analoogiliselt kirjutame selleks

$$\begin{cases}(ax+by)(x+y)=ax^2+by^2+(a+b)xy\\ (ax^2+by^2)(x+y)=ax^3+by^3+(ax+by)xy\end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases}115(x+y)-12xy=187\\ 187(x+y)-115xy=887\end{cases}.$$

Siit saame nüüd võrrandisüsteemi lahendamise järel $x+y=\frac{10861}{10981}$, $xy=-\frac{67036}{10981}$ ning järelikult

$$ax^4+by^4=187xy-877(x+y)=-2009.$$