Koduülesanded matemaatikast: 5. komplekt 2005/2006 õa

Ülesandeid algebrast (nooremale rühmale)

1. Leia summa

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2004\cdot 2005\cdot 2006}.$$

2. Polünoomi x^3+px^2+qx+r nullkohad on x_1, x_2, x_3, kus $p, q, r \in \mathbb{R}$ on etteantud arvud. Leia polünoom, mille nullkohad on x_1^2, x_2^2, x_3^2.

3. (a) Kas leidub täisarvuliste kordajatega polünoom P nii, et $P(2)=0$ ja $P(0)=4$?
(b) Kas leidub täisarvuliste kordajatega polünoom P nii, et $P(1)=7$ ja $P(8)=9$?
(c) Milliste täisarvude n korral leidub täisarvuliste kordajatega polünoom P, et $P(1)=7$ ja $P(8)=n$?

4. Skitseeri koordinaattasandil kõik punktid (x, y), mis rahuldavad võrdust

$$\{x\}+\{y\}=1$$

(siin $\{r\}=r-[r]$, kusjuures $[r]$ on suurim täisarv, mis ei ületa arvu r).

5. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_{2006} = 2006 \\ x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{2006}^4 = x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{2006}^3 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

6. Olgu r, s ja t võrrandi $x(x-2)(3x-7)=2$ lahendid.
(a) Tõesta, et r, s ja t on positiivsed reaalarvud.
(b) Leia $\arctan r+\arctan s+\arctan t$.

7. Jada (a_n) on määratud järgmiste tingimustega:
$a_0=1$, $a_1=2$, $n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}$ kõigi $n \geqslant 1$ korral. Leia summa

$$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{2005}}{a_{2006}}.$$

8. Reaalarvude a, b, c, d jaoks kehtivad järgmised võrdused:

$$\begin{cases} a+b = 12 \\ ax+by = 115 \\ ax^2+by^2 = 187 \\ ax^3+by^3 = 877 \end{cases}.$$

Leia avaldise ax^4+bx^4 väärtus.