Koduülesanded matemaatikast: 4. komplekt 2005/2006 õa

Ülesannete lahendused (noorem rühm)

1. Mitu ratsut saab paigutada 8×8 malelauale, nii et mistahes kaks ratsut ei löö teineteist?

   Lahendus. Ülesande lahendamiseks 'arvame ära', et malelauale saab paigutada maksimaalselt 32 ratsut, nii et nad üksteist ei löö. Ülesande lahendus ise koosneb kahest poolest:

   - Toome näite 32 ratsu paigutusest, nii et mistahes kaks ratsut ei ole üksteise tule all.

     Paigutame ratsud parajasti (tavalise, malekorras värvitud) malelaua kõigile 32 valgele ruudule. Et valgel ruudul asuv ratsu lööb ainult musti ruute, siis ei leidu kaht ratsut, mis teineteist lööksid.
   - Oletame, et malelauale on paigutatud 33 ratsut. Näitame, et siis leidub kaks ratsut, mis löövad teineteist.

     Märkus: põhimõtteliselt võib vaadelda suvaliselt paigutatud 32 ratsut ja näidata, et ei saa panna 1 ratsut juurde, nii et ta mingit varasemat ei tulistaks. Aga sellisel juhul tuleb vaadelda *kõiki võimalikke* 32 ratsu paigutusi, kus ükski kaks ratsut teineteist ei löö.

     Olgu malelaual 33 ratsut. Jaotame malelaua mõtteliselt 2×4 ristkülikuteks (näiteks nii, et iga veeru ruudud kuuluvad 2 ristkülikusse ning iga rea ruudud kuuluvad 4 ristkülikusse). Dirichlet' printsiibi põhjal leidub siis selline ristkülik, mis sisaldab vähemalt 5 ratsut. (Miks?)

     Olgu selle ristküliku veerud tähistatud tähtedega A ja B ning read tähistatud numbritega 1, 2, 3 ja 4. Selle ristküliku ruute võib seega tähistada $A1$, $A2$, ..., $B4$. Paneme tähele, et kõik selle ristküliku 8 ruutu saab jaotada paaridesse, nii et paari ruutudel asuvad ratsud tulistaksid teineteist: $(A1, B3)$, $(B1, A3)$, $(A2, B4)$, $(B2, A4)$

     Märkus: Kuidas tulla selliste jaotamiste peale? Olukorra piltlikustamiseks võib ruute $A1$, $A2$, ..., $B4$ kujutada punktidena. Kahe punkti vahele võib tõmmata joone, kui nendel asuvad ratsud löövad üksteist. Selliseid punktidest ja kaartest koosnevaid struktuure nimetatakse graafideks, ingl k *graph.*

     Kui me mingi paari ühele ruudule paneme ratsu, siis teisele ei saa enam ratsut panna. Järelikult ei saa 2×4 ristkülikusse paigutada rohkem kui 4 ratsut. Saime vastuolu.

2. Tõesta või lükka ümber järgmised väited:

   a) 11 lõpmatu kümnendmurru seast saab alati valida 2 sellist, mille jaoks leidub lõpmatu arv erinevaid kümnendkohti.

   b) 11 lõpmatu kümnendmurru seast saab alati valida 2 sellist, mille jaoks leidub lõpmatu arv võrdseid kümnendkohti.

   Lahendus. a) Selline väide loomulikult ei kehti: lihtsaks kontranäiteks on lõplikus arvus kümnendkohtades erinevad kümnendmurrud
   $0,011\ldots$, $0,111\ldots$, $0,211\ldots$, $\ldots$, $0,911\ldots$,$0,1211\ldots$.

   b) *Vihje.* Väide kehtib. Lahendus võiks alata umbes nii: 'Oletame vastuväiteliselt, et ükskõik, millised kaks kümnendmurdu $a = \ldots a_{-2}a_{-1}, a_0a_1\ldots$ ja $b = \ldots b_{-2}b_{-1}, b_0b_1\ldots$ me valime, leidub neil (kui palju?) võrdseid kümnendkohti. ...' Kasutada võiks Dirichlet' printsiipi.

3. A ja B ning veel 2006 inimest seisavad ringis. A ja B ei seisa kõrvuti. Mängijad A ja B puudutavad kordamööda oma naabreid, alustab A. Iga inimene, keda puudutati, peab kohe ringist lahkuma. Võitja on mängija, kes puudutab oma vastast. Näita, et üks mängijatest A ja B omab võidustrateegiat ja leia see strateegia.

   Lahendus. Olgu v inimeste arv, kes seisavad mängijast A vasakul A ja B vahel; olgu p inimeste arv, kes seisavad mängijast A paremal A ja B vahel. Siis v ja p on sama paarsusega, sest $v + p = 2006$. Pärast A suvalist käiku on $v \not\equiv p \pmod 2$, s.t. p ja v on erineva paarsusega. Pärast B suvalist käiku on $v \equiv p \pmod 2$, s.t. p ja v on sama paarsusega. Nüüd B jaoks on võitev strateegia hoida oma kummalgi käel paaritu arv inimesi:

- Kui A ja B vahel pole ühtegi inimest, siis B saab puudutada A-d ja võidab kohe.
- Kui B mõlemal käel leidub inimesi A ja B vahel, siis B puudutab inimesi oma sellel käel, kus asub paarisarv inimesi. Siis pärast B käiku on tema mõlemal käel paaritu arv inimesi. Järelikult ei saa pärast B käiku olla mingil pool B ja A vahel 0 inimest. Seega A ei saa B-d puudutada.

4. Kuhjas on 2006 kivi. Kaks mängijat valivad kordamööda hetkel kuhjas olevate kivide arvu jagaja ning võtavad ära vastava arvu kive. Mängija, kes võtab viimase kivi, on kaotaja. Leia, kes võidab ja millise strateegiaga ta peab selleks mängima. (Olgu mängijad A ja B ning tehku neist esimese käigu A.)

   Lahendus. Mängija A võidab, kui ta võtab igal oma käigul 1 kivi. Mängija A saab mängida nii, et pärast tema suvalist käiku on kuhjas paaritu arv kive. Mängija B peab võtma kuhjast paaritu arvu kive, sest paaritul arvul leidub ainult paarituid jagajaid. Pärast B käiku jääb siis kuhja alati paarisarv kive. On selge, et niimoodi jätkates on pärast mingit B käiku kuhjas 0 kivi, s.t. B kaotab.

5. Ruudustik suurusega $15 \times n$ täidetakse kaht tüüpi, viiest ühikruudust koosnevate kujunditega - U ja rist. (Kumbagi kujundit võib kasutada piiramatu arvu. Katta tuleb kogu ruudustik ning mingit osa sellest ei tohi katta mitmekordselt.) Milliste positiivsete täisarvude n jaoks saab ruudustikku nõutud viisil katta?

   Lahendus. Ülesande lahendamiseks 'arvame ära', et positiivsete täisarvude $n = 1, 2, 4, 7$ jaoks ei saa ruudustikku nõutud viisil katta ning kõigi muude n jaoks saab. Ülesande lahendus ise koosneb kahest poolest (mõlema poole jaoks on abiks joonis!):

   - Toome näite ruudustiku sobivast katmisest kõigi positiivsete täisarvude $n \notin \{1, 2, 4, 7\}$ jaoks.

     Paneme tähele, et me saame nende 2 kujundiga katta 3×5 ristküliku. Tõepoolest, paigutame 3×5 ristküliku keskele sümmeetriliselt risti, siis selle ülejäänud ruudud on võimalik täpselt katta kahe U abil. Pannes 3 sellist ristkülikut kõrvuti, saame katta ruudustiku 15×3. Pannes 5 sellist ristkülikut kõrvuti, saame katta ruudustiku 15×5. Järelikult, kasutades mitu korda viimaseid 15×3 ja 15×5 ristkülikuid, saame katta suvalise ruudustiku $15 \times (3x + 5y)$, kus x ja y on mittenegatiivsed täisarvud. Valides viimastes tähistes $(x; y) = (2; 0), (1; 1), (3; 0), (0; 2)$, näeme, et saab katta vastavalt ruudustikud 15×6, 15×8, 15×9 ja 15×10. Lisades viimasele kolmele juurde ruudustikke 15×3, näeme, et saab katta ruudustikud $15 \times (8 + 3m)$, $15 \times (9 + 3m)$ ja $15 \times (10 + 3m)$, mis hõlmavad kõiki võimalikke ruudustikke $15 \times n$, kus $n > 7$.

   - Tõestame, et $n \in \{1, 2, 4, 7\}$ korral ruudustikku sobival viisil katta ei saa.

     On selge, et ruudustikku 15×1 ei mahu panema ei risti ega U-d, seega seda katta ei saa. Ruudustikku 15×2 mahub kujunditest ainult U, aga see jätab üheruudulise augu, mida katta ei saa. Seega ka ruudustikku 15×2 sobivalt katta ei saa.

     Vaatleme, kas on võimalik katta sellist kujundit, mis koosneb 2×4 ristkülikust, mille üks külg pikkusega 4 võib olla 'lahtine', s.t. me võime kujunditega minna üle selle külje. Tähistame selle ristküliku veerge A ja B ning ridasid 1,. . . ,4. Olgu külg B lahtine. On selge, et nurga $A1$ juurde ei saa paigutada risti. Samuti saab sinna paigutada U ainult 2 asendis 4 võimalikust - sest 2 asendis jääb U sees olev tühi ruut eraldatuks ning seda ei saa enam kujunditega täita. Ühe asendi puhul peaksime täitma ruute $A4$ ja $B4$, nii et me ei täida teisi A ja B ruute peale $B2$ - aga see on võimatu. Teise asendi puhul on U sees asuvat auku $B2$ võimalik täita ristiga - aga siis jääb $A4$ eraldatuks - või U-ga, mis läheb $B2, B3, C3, D3, D2$ - aga siis jäävad veergudes A ja B üle ruudud $A3, A4$ ja $B4$, mida pole võimalik sobivalt kujundiga täita. Järelikult sellist kujundit sobivalt katta ei saa.

     Olgu $n = 4$. Siis ruudustiku 15×4 üks ots on just selline lahtise küljega ristkülik. Järelikult ei saa ruudustikku 15×4 sobivalt katta.

Olgu $n = 7$. Siis vaatleme ruudustikku 15×7, kus veerud on tähistatud $A, \ldots, O$ ning read 1,...,7. Nurga $A7$ täitmiseks saame, nagu eelneva arutluse põhjal selgub, kasutada ainult kujundit U 2 võimalikus asendis 4-st. Ühel juhul tekib $A1$ juures juba eelnevalt mainitud lahtise küljega 2×4 ristkülik, seega see variant ei sobi. Viimane võimalus on asetada U ruutudesse $A6, A7, B7, C7, C6$. Siis selgub, et U augu $B7$ täitmiseks ainus võimalus on rist - sest pannes sinna U, saame, et siis ei saaks $A5$ mitte mingil viisil sobivalt täita. Kui rist on paika pandud, peame $A4$ täitmiseks kasutama U-d. Kokku saame, et veergudest A, B ja C on täitmata veel ainult read 1 ja 2. Neid aga ei saa sobival viisil täita, sest rist ei mahu kahele reale, aga U jätaks augu.

6. Ringjoonel on valitud 98 punkti. Kaks mängijat valivad kordamööda kaks punkti nende 98 hulgast ning tõmbavad nende vahele lõigu. Mäng lõpeb, kui iga punkt neist 98-st on vähemalt ühe lõigu otspunktiks. Kes võidab, kui võitja on see, kes teeb viimase käigu? (Eeldada, et mõlemad mängijad mängivad parima võimaliku strateegiaga.)

   Lahendus. Kui mängijad mängivad parima võimaliku strateegiaga, siis kaotaja on see, kes on sunnitud võtma kasutusele uue punkti, nii et kasutamata punktide arv langeb alla 3. Tema vastane saab siis kasutusele võtta viimased 1 või 2 kasutamata punkti ning võidab.

   Et kellelgi tekiks vajadus kasutusele võtta mõnda viimasest 3 kasutamata punktist, peavad kõik ülejäänud lõigud olema tõmmatud. Kõiki ülejäänud lõike on niipalju, kui on kõiki lõike 95 punkti vahel, s.o. $95 * 94/2 = 4465$. Et see on paaritu arv, siis viimase lõigu nendest 4465-st tõmbab alustaja. Järelikult teisena käija kaotab.