Koduülesanded matemaatikast: 2. komplekt 2005/2006 õa

Ülesannete lahendused (noorem rühm)

1. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (m, n), et

$$\frac{3}{m} + \frac{5}{n} = 1.$$

Vastus: $(4, 20)$, $(6, 10)$, $(8, 8)$ ja $(18, 6)$.

Lahendus 1. Antud võrrandi paneme kirja kujul $5m + 3n = mn$ ning seejärel teisendame ta kujule $(m-3)(n-5) = 15$. Kuna $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$ ja kuna $m - 3$ ja $n - 5$ on täisarvud, siis võimalikud paarid on $(-1, -15)$, $(-3, -5)$, $(-5, -3)$, $(-15, -1)$, $(1, 15)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$ ja $(15, 1)$. Esimesel neljal juhul vastavad m ja n ei ole mõlemad positiivsed, ülejäänud neli juhtu aga annavad meile lahendid $(4, 20)$, $(6, 10)$, $(8, 8)$ ja $(18, 6)$.

Lahendus 2. Kuna m ja n on mõlemad positiivsed täiasrvud, siis mõlemad liidetavad peavad olema ühest väiksemad, seega $m > 3$ ja $n > 5$. Paneme nüüd tähele, et kui üks arvudest m või n kasvab, siis teine peab alati kahanema. Seega piisab vaadata läbi kõik võimalused $m = 4$ kuni $m = 18$, sest $m > 18$ korral $n < 6$.

2. Kas leidub täisarvuliste küljepikkustega täisnurkne kolmnurk, mille mõlema kaateti pikkus on algarv?

Vastus: ei.

Lahendus 1. Olgu a ja b kaatetite pikkused ja c hüpotenuusi pikkus. Täisarvu ruut saab anda 4-ga jagamisel jäägi 0 või 1. Paneme tähele, et kaatetid ei saa olla mõlemad paaritud algarvud, sest muidu oleks vasaku poole jääk jagamisel 4-ga $1 + 1 = 2$, ning seega vasak pool ei saaks olla täisarvu c ruut. Seega vähemalt üks arvudest a ja b peab olema paaris algarv, st 2. Kaatetid ei saa olla korraga 2, sest $2^2 + 2^2 = 8$ ei ole täisarvu ruut.

Järelikult üks arvudest a ja b on paaritu ja teine on 2. See vastab võrrandile $b^2 + 4 = c^2$. Näitame, et sellel lahendeid ei leidu. Viime b^2 paremale, saame $4 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$. Arvud $c-b$ ja $c+b$ peavad olema erinevad positiivsed täiarvud (sest hüpotenuus on kaatetist alati pikem). Ainuke võimalus selleks on $c - b = 1$ ja $c + b = 4$, kust $c = 2,5$ ja $b = 1,5$. Saime vastuolu sellega, et küljed on täisarvud. Seega täisnurkset kolmnurka, mille mõlema kaateti pikkus on algaarv, ei leidu.

Lahendus 2. Olgu a ja b kaatetite pikkused ja c hüpotenuusi pikkus. Ilmselt $a \neq b$. Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et $a<b<c$. Nüüd $b^2 = (c-a)(c+a)$. Kahe erineva positiivse täisarvuarvu korrutis saab olla täisruut vaid siis, kui üks korrutatavatest arvudest on 1, seega $c - a = 1$. Kuid eelduse $a<b<c$ tõttu $c - a \geqslant 2$, mis viib vastuoluni.

Lahendus 3. Võrrandi $a^2 + b^2 = c^2$ kõik lahendid ehk Pythagorase kolmikud saab tuntud fakti kohaselt esitada kujul $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, kus m ja n on mingid positiivsed täisarvud. Ainuke võimalus, et $b = 2mn$ oleks algarv, on $m = n = 1$. Kuid sel juhul $a = 1^2 - 1^2 = 0$, mis on ülesannete tingimustega välistatud.

3. Kas leidub positiivne täisarv n järgmise omadusega: arvu n enda ja arvu n kõigi numbrite summa korrutise numbrite summa on 3?

Vastus: ei.

Lahendus. Tähistagu $s(m)$ arvu m numbrite summa. Oletame, et nõutud omadusega arv n leidub. Siis ülesande tingimuste kohaselt peab kehtima $s(n \cdot s(n)) = 3$. Numbrite summa jagub 3-ga parajasti siis kui arv ise jagub 3-ga, seega korrutis $n \cdot s(n)$ jagub 3-ga. Järelikult vähemalt üks teguritest jagub 3-ga. Paneme aga tähele, et kui üks arv n või $s(n)$ jagub 3-ga, siis ka teine arv peab 3-ga jaguma. Nii et tegelikult korrutis $n \cdot s(n)$ jagub 9-ga. Kui arv jagub 9-ga siis ka tema numbrite summa jagub 9-ga, seega $s(n \cdot s(n)$ jagub 9-ga. Saime vastuolu. Järelikult ühtegi sellist arvu n ei leidu.

4. Igale kuubi tahule on kirjutatud positiivne täisarv. Igasse kuubi tippu on kirjutatud arv, mis saadakse selles tipus kohtuvatele tahkudele kirjutatud arvude korrutamisel. Kuubi kõigis tippudes asuvate arvude summa on 70. Leia kuubi kõigil tahkudel asuvate arvude summa.

   Vastus: 14.

   Lahendus. Olgu kuubi tahkudele kirjutatud arvud a_1, a_2, a_3, a_4 ja a_5 (vastastahkudel on vastavalt arvud a_1 ja a_3, a_2 ja a_4 ning a_5 ja a_6). Kuubi tippudesse on kirjutatud siis arvud $a_1a_2a_5$, $a_2a_3a_5$, $a_3a_4a_5$, $a_4a_1a_5$, $a_1a_2a_6$, $a_2a_3a_6$, $a_3a_4a_6$ ja $a_4a_1a_6$. Seega saame

$$\begin{aligned}70 &= a_1a_2a_5 + a_2a_3a_5 + a_3a_4a_5 + a_4a_1a_5 + a_1a_2a_6 + a_2a_3a_6 + a_3a_4a_6 + a_4a_1a_6\\ &= (a_5 + a_6)(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1)\\ &= (a_1 + a_3)(a_2 + a_4)(a_5 + a_6).\end{aligned}$$

   Võime kirjutada $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Siit saame, et korrutises $(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)(a_5 + a_6)$ üks teguritest peab võrduma 2-ga, üks 5-ga ja veel üks 7-ga (kuna tahkudele on kirjutatud positiivsed täisarvud, siis iga tegur on vähemalt 2). Nende summa on seega

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2 + 5 + 7 = 14.$$

5. Naturaalarvu $n > 100$ jagati jäägiga arvudega 10, 35 ja 42. Selgus, et 35-ga ja 42-ga jagamisel tekkivate jääkide summa on võrdne 10-ga jagamisel tekkiva jäägiga. Tõesta, et n on kordarv.

   Lahendus. Vajalikud jagamised saame kirja panna kujul

$$n = 10a + r = 35b + s = 42c + t,$$

   kus a, b, c on naturaalarvud, $s + t = r$. Kui üks arvudest r, s või t on 0, siis n on ilmselt kordarv. Arvud r, s ja t on seega kõik hulgast $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, sest $r \geq s$ ja $r \geq t$. Piisab vaadelda juhud $r = 1$, $r = 3$, $r = 7$ ja $r = 9$, sest muudel juhtudel on $n = 10a + r$ kordarv. Juht $r = 1$ annab vastuolu sellega, et $s + t = r$. Paneme tähele, et $s - t = 42c - 35b = 7(6c - 5b)$, seega $7|s - t$. Kui $r = 3$ või $r = 7$, saame $0 \leq |s - t| \leq 7$, mis annab vastuolu. Jääb juht $r = 9$, millele vastavad ainult võimalused $s = 8$, $t = 1$ või $s = 1$, $t = 8$. Neile kahele võimalusele vastavad võrdused $35b - 10a = 1$ või $35b - 10b = 8$. Mõlemad võrdused on aga vastuolulised, sest neis ´vasak pool jagub 5-ga, parem pool aga mitte.

6. Mingi 25 naturaalarvu korrutise kümnendesitus lõpeb 25-ga. Tõesta, et nende arvude seast saab välja valida kolm arvu, mille korrutise kümnendesitus lõpeb samuti 25-ga.

   Lahendus. Et kõikide arvude korrutis on paaritu, siis peab iga arv olema paaritu. Et korrutis jagub 25-ga, siis 25 arvu seas leidub kaks sellist arvu m ja n, et mn jagub 25-ga. Vaatame edaspidi 4-ga jagamisel tekkivaid jääke.

   Oletame, et mn annab jäägi 1. Kui kõik ülejäänud 23 arvu annaks alati jäägi 3, siis kõigi 25 arvu korrutis annaks jäägi 3 (sest kahe jäägi 3 andva arvu korrutamisel tekib jääk 1, seega 22 arvu korrutamisel tekib jääk 1 ning 23. arvuga korrutamisel saame jäägi 3). See oleks aga vastuolu, sest 25-ga lõppev arv annab 4-ga jagamisel jäägi 1. Seega ülejäänud 23 arvu seas vähemalt üks annab jäägi 1. Olgu see arv k. Nüüd mnk jagub 25-ga ning annab 4-ga jagamisel jäägi 1, seega mnk lõpeb 25-ga.

Oletame nüüd, et mn annab jäägi 3. Kui kõik ülejäänud 23 arvu annaks alati jäägi 1, siis kõigi 25 arvu korrutis annaks jäägi 3 (sest 23 jäägi 1 andva arvu korrutamisel tekib jääk 1). See oleks jälle vastuolu. Seega ülejäänud 23 arvu seas vähemalt üks annab jäägi 3. Olgu see arv k. Nüüd mnk jagub 25-ga ning annab 4-ga jagamisel jäägi 1, seega mnk lõpeb 25-ga.

7. Leia kõik sellised algarvude paarid (p, q), et $3p^2 + 5q^4 + 15 = 13p^2q^2$.

   Vastus: $(2, 3)$.

   Lahendus. Kui nii p kui ka q oleksid paaritud, siis võrduse vasak pool oleks kongruentne 3-ga mooduli 4 järgi, aga võrduse parem pool oleks selle mooduli järgi kongruentne 1-ga. See see võimalus langeb ära ning vähemalt üks arvudest p ja$q$ peab olema paaris algarv, seega 2.

   Paar $p = q = 2$ ei rahulda ülesande tingimusi.

   Kui $p = 2$, siis vahetult leiame, et $q = 3$. Juhul $q = 2$ sobivaid täisarvulisi p väärtusi ei leidu.

   Märkus. Ülesannet saab sama hästi lahendada ka mooduli 3 abil.

8. a) Tõesta, et mistahes 10 positiivse täisarvu hulgast saab eraldada mittetühja alamhulga, mille arvude summa jagub 10-ga.
   b) Üldista tõestust juhu $n = 10$ jaoks suvalisele positiivsele täisarvule n.

   Märkus: Hulga alamhulk võib sisaldada suvalise arvu esialgse hulga elemente, sh ainult ühe või kõiki.

   Lahendus. a) Olgu need 10 arvu a_1, a_2, ..., a_{10}. Moodustame summad

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1; \\ S_2 &= a_1 + a_2; \\ \dots \\ S_{10} &= a_1 + a_2 + a_{10}. \end{aligned}$$

   Kui nende seas leidub üks 0-ga lõppev summa, siis ongi sobilik alamhulk leitud. Kui aga ühtegi 0-ga lõppevat summat ei leidu, siis 10 summa seas kindlasti leidub kaks sellist, mis lõppevad sama numbriga (sest need 10 summat võivad lõppeda ainult 9 erineva numbriga). Olgu need summad S_i ja S_j, kus $j > i$. Nüüd $S_j - S_i = a_{i+1} + \ldots + a_j$ jagub kindlasti 10-ga, seega sobivaks alamhulgaks võime võtta $a_{i+1}, \ldots, a_j$.

   b) Moodustame samamoodi nagu eelmises punktis n erinevat summat ning vaatame nende jääke jagamisel n-ga. Kui nende seas on jääk 0, siis sobilik alamhulk ongi leitud, vastasel juhul leidub kaks summat, mis annavad n-ga jagades sama jäägi (sest kokku on n summat ja $n - 1$ lubatud jääki). Olgu need summad S_i ja S_j, siis sobivaks alamhulgaks osutub $a_{i+1}, \ldots, a_j$.