

Koduülesanded matemaatikast 2004/2005

Komplekt B2

1. Tõesta, et reaalarvud a_1, a_2, b_1, b_2 rahuldavad tingimusi

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

siis ja ainult siis, kui nad rahuldavad tingimusi

$$a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

2. Tõesta, et avaldise $n^2 - n + 2$ väärtus ei jagu 49-ga ühegi naturaalarvu n korral.
3. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk ümberringjoone raadiusega R ning olgu E selle nelinurga diagonaalide lõikepunkt.
- a) Tõesta, et kui diagonaalid AC ja BD on risti, siis kehtib võrdus $|EA|^2 + |EB|^2 + |EC|^2 + |ED|^2 = 4R^2$.
- b) Too näide selle kohta, et väite a) pöördväide ei kehti.

4. Olgu $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 1$.

- a) Leia selline funktsioon $g(x)$, et iga täisarvulise x korral kehtiksid võrratused $(g(x))^2 \leq f(x) \leq (g(x) + 1)^2$.
- b) Leia kõik sellised täisarvud n , mille korral $\sqrt{f(n)}$ on ratsionaalarv.

5. Tähistame mistahes $(m+1)$ -kohalise naturaalarvu $n = \overline{a_m \dots a_1 a_0}$ korral

$$S(n) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^m a_m.$$

Kas leidub selline naturaalarv k , mille korral $S(2^k) = S(2^{k+1})$?