

Koduülesanded matemaatikast 2004/2005

Komplekt B1

1. Mitu arvu tuleb minimaalselt välja jätta arvude 1, 2, 3 ..., 28 hulgast, et kõigi järelejäävate arvude korrutis oleks mingi täisarvu ruut?
2. Tõesta, et mistahes positiivsete täisarvude a ja b korral kehtib võrratus

$$|a\sqrt{2} - b| > \frac{1}{2(a+b)}.$$

3. On antud 20 paarikaupa erinevat reaalarvu, millel on järgmine omadus: mistahes kahe antud arvu $a < b$ korral leidub antud arvude hulgast selline arv x , et $a < -x < b$. Kui palju võib antud 20 arvu hulgast olla positiivseid?
4. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, kus $\angle ACB \neq 45^\circ$. Olgu M ja N vastavalt kolmnurga ABC tippudest A ja B tõmmatud kõrguste aluspunktid ning olgu K ja T sellised punktid vastavalt kiirtel MA ja NB , et $|MK| = |MB|$ ja $|NT| = |NA|$. Tõesta, et lõigud KT ja MN on paralleelsed.
5. Juku valib täisarvude 1 kuni 100 hulgast välja mingid k_1 arvu nii, et suurim neist on võrdne ülejäänud $k_1 - 1$ valitud arvu korrutisega. Edasi valib ta järelejäänud $100 - k_1$ arvu hulgast välja mingid k_2 arvu nii, et suurim neist on võrdne ülejäänud $k_2 - 1$ valitud arvu korrutisega; seejärel valib järelejäänud $100 - k_1 - k_2$ arvu hulgast välja mingid k_3 arvu nii, et suurim neist on võrdne ülejäänud $k_3 - 1$ valitud arvu korrutisega, jne. Mitu komplekti arve saab Juku niiviisi kõige rohkem valida?