

Ülesandeid koduseks nuputamiseks

Valgevene 1999

1. Olgu Φ kujund, mis koosneb kahe sama keskpunktiga kongruentse ruudu ühendist (ruudud võivad olla üksteise suhtes pööratud). Tähistagu $S(\Phi)$ ja $P(\Phi)$ vastavalt kujundi Φ pindala ja ümbermõõtu.

Leia suuruse $\frac{S(\Phi)}{P(\Phi)}$ kõik võimalikud väärtused.

2. Leia kõik täisarvud x, y, z , mille korral

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^2 = 1 \end{cases} .$$

3. On antud kumer nelinurk $ABCD$, milles $AB = CD$, $AD = (\sqrt{3}+1)BC$ ja $\angle D - \angle A = 30^\circ$. Leia $\angle B - \angle C$.
4. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral iga $x, y \in \mathbb{R}$ jaoks kehtib võrdus

$$(x + y)(f(x) - f(y)) = f(x^2) - f(y^2).$$

5. On antud $n \geq 3$ kivikuhja (kuhja moodustab ka ainult üks kivi), igaühes erinev arv kive. On teada, et kui suvaline kuhi ära võtta, saab temas leiduvad kivid teiste vahel nii ära jagada, et kõigisse allesjäävatesse kuhjadesse jääb sama arv kive. Samuti on teada, et kui suvalised kaks kuhja ära võtta, saab neis leiduvad kivid teiste kuhjade vahel nii ära jagada, et kõigisse allesjäävatesse kuhjadesse jääb sama arv kive.

Milline on vähim võimalik kivide arv suurimas kuhjas?